MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
DR. FAZEKAS FERENC

A. III.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

ÍRTA:
DR. BAJCSAY PÁL

ÖTÖDIK KIADÁS

TANKÖNYVKIADÓ

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
DR. FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS

★

BELSŐ MUNKATÁRSAK:
DR. FREY TAMÁS
EGYETEMI TANÁR
A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK DOKTORA

DR. BAJCSAY PÁL
EGYETEMI DOCENS
KANDIDÁTUS

★

SZEMLÉLTETÉS:
GYURCSY ENDRE
OKL. VILLAMOSMÉRNÖK

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
K 045 215

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1976

A

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SOROZAT KÖTETEI

A.

A. I. **Középiskolai matematika** (Ötödik kiadás)
A. II. **Egyváltozós elemi függvények** (Harmadik kiadás)
A. III. **Differenciálszámítás** (Ötödik kiadás)
A. IV. **Határozatlan integrál** (Negyedik kiadás)
A. V.* **Határozott integrál (Első rész)** (Negyedik kiadás)
A. V.** **Határozott integrál (Második rész)** (Harmadik kiadás)
A. VI. **Többváltozós függvények és differenciálásuk** (Negyedik kiadás)
A. VII. **Többváltozós függvények integrálása** (Negyedik kiadás)
A. VIII. **Taylor-sorok** (Harmadik kiadás)
A. IX. **Vektoralgebra. Lineáris egyenletrendszerek** (Negyedik kiadás)
A. X.* **A logarléc** (Hatodik kiadás)

B.

B. I-II-III. **Vektoranalízis (Térgörbék és felületek differenciálgeometriája. Skalár-, vektor- és tenzormezők)** (Negyedik kiadás)
B. IV. **Komplex függvénytan** (Negyedik kiadás)
B. V. **Numerikus és grafikus közelítő módszerek** (Második kiadás)
B. VI. **Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok** (Harmadik kiadás)
B. VII.* **Közönséges differenciálegyenletek (Első rész)** (Ötödik kiadás)
B. VII.** **Közönséges differenciálegyenletek (Második rész)** (Harmadik kiadás)
B. VIII. **Parciális differenciálegyenletek** (Második kiadás)

C.

C. I. **Operátorszámítás. Speciális függvények** (Második kiadás)
C. II. **Variációszámítás** (Harmadik kiadás)
C. III. **Integrálegyenletek** (Harmadik kiadás)
C. IV. **Mátrixszámítás** (Negyedik kiadás)
C. V. **Valószínűségszámítás** (Harmadik kiadás)
C. VI. **Matematikai összefoglaló** (Negyedik kiadás)
C. VII. **Matematikai programozás** (Második kiadás)

(A szövegben az egyes kötetekre a fenti betű- és számjelzéssel hivatkozunk.)

A. III.

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

ÍRTA:
DR. BAJCSAY PÁL
egyetemi docens
kandidátus

Ötödik kiadás

EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

KIADÁSÁT AZ OKTATÁSI MINISZTER RENDELTE EL

E kötet kéziratát átnézte

DR. ALEXITS GYÖRGY

akadémikus

Összkiadás: **ISBN 963 17 1073 4**

III. kötet: **ISBN 963 17 1930 8**

© *Dr. Fazekas Ferenc, Dr. Bajcsay Pál, Budapest, 1974*

A kiadásért felelős a Tankönyvkiadó igazgatója

Felelős szerkesztő: Ambrus Ferenc

Műszaki vezető: Lojd Lajos

Grafikai szerkesztő: Permay Vilmos

Műszaki szerkesztő: Hülber Péter

A kézirat nyomdába érkezett: 1975. október – Megjelent: 1976. október

Példányszám: 2000 – Terjedelem: 12,25 (A/5) ív, 62 ábra

Készült az 1968. évi negyedik kiadás alapján, monószedéssel, íves magasnyomással, az MSZ 5601—59 és az MSZ 5602—55 szabvány szerint

Raktári szám: 44131/III.

75.4185 Egyetemi Nyomda, Budapest. Felelős vezető: Sümeghi Zoltán igazgató

A SOROZAT ELSŐ KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

A műegyetemi oktatás és mérnöki továbbképzés évtizedek óta nehezen nélkülöz egy, a műszaki igényeknek megfelelő magyar matematikai példagyűjteményt. E hiányt felismerve, matematikai tanszékeink lelkes fitaljai az utolsó 2—3 évben több jegyzetet állítottak össze a matematikai gyakorlatok anyagából. Tovább enyhítette a hiányt *Gjunter—Kuzmin* időközben magyarul megjelent kiváló felsőbb matematikai példatára, bár ezt — magas színvonalára való tekintettel — elsősorban nem a műegyetemi, hanem a tudományegyetemi hallgatók részére adatta ki a minisztérium. A probléma viszont teljes megoldást kívánt a hallgatók és a kezdő tanszemélyzet létszámának nagymérvű megnövekedése miatt. Ez utóbbi körülmény azt az újabb igényt támaszotta egy leendő példatárral szemben, hogy az a feladatokon és végeredményeiken kívül még bő megoldási útmutatásokat is tartalmazzon. Ugyanakkor több matematikai értekezleten szorgalmazták, a legmeggyőzőbben *dr. Alexits* akadémikus professzor, hogy műszaki egyetemeinken *alkalmazott műszaki matematikát* oktassunk, és gyűjtsünk össze megfelelő műszaki, alkalmazott anyagot.

A minisztérium figyelmét ekkor felhívták néhány lelkes hallgató társaságában már korábban s hasonló szempontok szerint elindított gyűjtő munkámra. A minisztérium azonnal felkarolta kezdeményezésemet, megbízott egy *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* című példagyűjtemény terveinek, szerkesztési elveinek kidolgozásával, majd rövidesen a mű szerkesztésével — egyúttal biztosítva több matematikai tanszék néhány tapasztaltabb adjunktusának, illetve tanársegédének közreműködését.

Munkánk A. és *B.** része jórészt a metematikának a műszaki felsőoktatásban világszerte szokásossá vált fejezeteit tárgyalja, de a megszokott keretekhez képest egyeseket kibővítve, főleg a *B.* részben, a klasszikus műszaki matematika érintett fejezeteit. A sorozat *C.* része a modern műszaki matematika néhány olyan nagy jelentőségű fejezetébe nyújt bevezetést, amelyek bevonulása műszaki felsőoktatásunkba az utóbbi években megkezdődött.

Munkánk első célja a szokásos tananyaggal kapcsolatban mindazt előadni, aminek műszaki egyetemeinkben a helyesen, korszerűen, a műszaki igényeknek megfelelően vezetett matematikai gyakorlatokon szerepelnie kell. Esti és levelező oktatásunkban idevágó füzeteink esetleg még szélesebb körű felhasználásra is kerülhetnek.

Munkánk második (de nem mellékes) *célja* gyakorlati és műszaki anyagot nyújtani a különböző tagozatokon a felsőbb éves nappali és esti hallgatók speciális matematikai oktatáshoz, a szakmérnöki továbbképző tanfolyamok és a *Mérnöki Továbbképző Intézet* rendszeres matematikai oktatásához, továbbá az igényesebb hallgatók, a fiatal matematikai és műszaki tanszemélyzet, a kutató és üzemi mérnökök és aspiránsok egyéni vagy csoportos továbbtanulásához.

E példagyűjteménynél viszonylag újszerűnek mondható célkitűzések megvalósítása szintén *újszerű szerkesztési elveket* kívánt. Ennek megfelelően nem szorítkoztunk, mint a legtöbb példatár, csupán feladatok és végeredményeik közlésére. Ellenkezőleg, megkíséreltük fejezetről fejezetre végigvezetni a következő rendszert: *a)* elméleti összefoglaló; *b)* bő magyarázat kíséretében részletesen megoldott, kisszámú jellegzetes mintapélda; *c)* az előbbiek alapján könnyen megoldható, csak végeredménnyel ellátott nagyszámú gyakorlófeladat; *d)* esetleg rövid útmutatással ellátott és csak vázlatosan megoldott különleges (csillagos) példák; *e)* esetleg egyes bizonyítások vázlatos közlése a különleges példák között; *f)* végül műszaki alkalmazások bemutatása. E láncszemek véleményünk szerint jól szolgálhatják a matematikai elmélet és a műszaki gyakorlat összekapcsolásának ügyét. E szerkesztési elvek legtapasztaltabb professzoraink helyeslésével találkoztak, továbbá egészen új szovjet példatárakban észleltünk többé-kevésbé hasonló szerkesztési elveket. Megjegyzendő, hogy

* A sorozat köteteinek címjegyzékét lásd a 2. oldalon!

bizonyára nem mindenütt sikerült e rendszert teljes egészében megvalósítanunk; olykor e sorrendtől is eltértünk.

Az *A. rész köteteiben*, professzorainkkal egyetértésben, eléggé óvatosan méreteztük a műszaki alkalmazások számát a többi példákéhoz képest. Erre késztetett az elsőéves hallgatók műszaki ismereteinek hiányossága, valamint az e füzetekben közölt matematikai apparátus elégtelensége komolyabb műszaki problémák megoldásához. Még így is lényegesen bővebb műszaki példaanyagunk, mint az ismert példatáraké.

A *B.* és *C. rész köteteiben* — az olvasó egyre növekvő matematikai és műszaki ismereteire támaszkodva — nagy bőségben tárgyalunk problémákat a klasszikus és modern műszaki matematika legkülönbözőbb területeiről, amelyekben kézzelfoghatóan jelentkezik a matematika és a technika egysége.

Közismert tény, hogy a híressé vált külföldi példatárak legtöbbje évtizedek alatt számos kiadás folyamán forrt ki, tökéletesedett. E viszonylag újszerű célkitűzésekkel készülő példatár fiatal szerzői tehát érthetően sok-sok *észrevételt*, megjegyzést, tanácsot várnak és kérnek ezúton is az olvasóktól, hogy e sorozat kitűzött céljának minél hamarabb és minél teljesebb mértékben megfeleljen.

A minisztérium és professzoraink tanácsát követve, bátran merítettünk a legkülönbözőbb jó *forrásokból*, sokkal inkább törekedve az anyag gazdagságára és megbízhatóságára, mintsem — példatárnál amúgy is szegényes sikert ígérő — eredetiségre. Természetesen szépszámú új feladatot is készítettünk.

A szemléltető anyag gondos szerkesztése és megrajzolása *Gyurcsy Endre* okl. vill. m. kolléga érdeme.

E sorozat megszületését megkönnyítette az a körülmény, hogy a minisztérium egyetemi tankönyvosztálya egy ilyen mű szükségességét, jelentőségét és elvi vonatkozásait igen világosan látta, és másokkal is meg tudta értetni.

Ki kell emelnem *Egerváry* akadémikus professzor számos szakmai megjegyzését és műegyetemi előadásait, amelyekből merített tanulságok nagymértékben emelik munkánk értékét. Állandó érdeklődésével és gazdag pedagógiai és módszertani útmutatásokkal volt segítségünkre *Gallai* professzor. Meg kell emlékeznem az *Alkalmazott Matematikai Intézetről*, amely modern könyvtárával és alkotó légkörével a gyűjtés legelejétől mindvégig támogatta munkánkat.

Köszönettel tartozom a *Tankönyvkiadó Vállalatnak*, különösképpen a *műszaki szerkesztőségnek*, amely értékes segítséget nyújtott nekünk e nyomdailag nagy követelményeket támasztó sorozat műszaki munkálataival kapcsolatban.

Végezetül *munkánkat műszaki egyetemeink tanszemélyzetének és hallgatóinak ajánljuk.* Használják fel e füzeteket a maguk, illetve a leendő mérnökök ezreinek képzésére! Észrevételeikkel segítsék elő e gyűjtemény mielőbbi tökéletesedését!

Budapest, 1952. szeptember 1.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

Közel nyolc év munkájával — néhány kisebb jelentőségű módosítástól eltekintve az eredeti terv szerint — sikerült befejeznünk a *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* c. sorozatot, 23 kötetben. Munkaközösségünk céltudatossága és munkakedve, a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* kitartó támogatása, bírálóink értékes segítsége és nem utolsósorban egyre növekvő olvasótáborunk lelkes érdeklődése lehetővé tette az összes nehézségek leküzdését. Noha távolról sem tekintjük tökéletesnek, véglegesnek könyveinket, mégis az első kiadás befejezésekor a magyar műszaki matematikai felsőoktatás érdekében végzett odaadó munka jó érzése tölti el munkaközösségünket.

Könyveinket a hazai szakemberek és szaklapok kedvezően fogadták, és számos hasznos észrevétellel, tanáccsal voltak segítségünkre. Köteteink az évek során több keleti és nyugati államba is eljutottak. Ez év nyarán pedig abban a megtiszteltetésben részesültünk, hogy a *belgiumi Nemzetközi Mérnöki Matematikai Kongresszus* vezetősége kiállította és idegen nyelvű, vetített képes előadásban is bemutatta a teljes sorozatot, figyelemre méltó érdeklődés és elismerés mellett.

Most, a második kiadás során a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének — a megalkotásnál semmivel sem könnyebb — munkája vár ránk. Természetesen, az első kiadás munkálatai során szerzett gazdag tapasztalataink, az újabb hazai és külföldi szakirodalom tanulmányozása, továbbá a könyveinkről kapott hazai és külföldi észrevételek jelentős segítségünkre lesznek. Remélhetőleg, módunk lesz a műszaki matematikának néhány újabb diszciplináját is feldolgozni a sorozatban.

Amikor munkaközösségünk változatlan céltudatosságáról és munkakedvéről biztosíthatom a magyar műszaki matematika híveit, egyben ismét kérem bírálóink, olvasóink, valamint a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* további szakmai, erkölcsi és anyagi támogatását, nem különben az *Egyetemi Nyomda* ismert színvonalú munkáját.

Budapest, 1958. szeptember 1.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT HARMADIK KIADÁSÁHOZ

1963-ban szükségessé vált a sorozat harmadik kiadásának megindítása, a második kiadás lendületes folytatása mellett. A harmadik kiadás egyrészt olyan hagyományos, de széles körben érdekes tárgyú kötetekkel kezdődött meg, mint az A. I. és A. X., másrészt olyan modern alkalmazási területű és e miatt mindinkább keresetté vált kötetekkel, mint az A. IX., B. IV.

Az utóbbi második kiadások fél éven belüli elfogyása éppen a matematikai programozás lineáris algebrai segédeszközeivel, illetve a síkbeli rugalmasságtan korszerű, komplex függvénytani módszerével kapcsolatos bővítés után — kézzelfoghatóan bizonyítja a sorozat második kiadásának előszavában kitűzött fejlesztési tervek és a megvalósításukra kifejtett erőfeszítések helyességét.

E körülmény buzdítás munkaközösségünk részére és megnyugtatás a Kiadó számára is, látván, hogy újabb áldozatai hasznos célt és reális igényeket szolgálnak.

Említésre méltó, hogy sorozatunk vagy egyes kötetei 1958 óta több újabb külországban (pl. a Szovjetunióban, NDK-ban, Jugoszláviában, Egyiptomban, USA-ban, Angliában, NSZK-ban) és nemzetközi fórumon (pl. az NDK Matematikai Társulatának 1963. évi nemzetközi ülésszakán) tudtak helytállni, és versengeni a hasonló rendeltetésű külföldi munkákkal.

Ilyen kedvező adottságok között természetes, hogy lelkesen folytatjuk a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének nagy munkáját, ismét kérve ehhez a minisztérium, a Kiadó és nem utolsósorban a műszaki olvasótáborunk buzdító, áldozatkész támogatását.

Budapest, 1964 február 15.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ E KÖTET ELSŐ KIADÁSÁHOZ

A Műszaki Matematikai Gyakorlatok című feladatgyűjtemény jelen kötete műszaki egyetemeink hallgatóinak I. féléves matematikai tanulmányaihoz nyújt segítséget. A feladatgyűjtemény célja az, hogy az elmélet rövid, emlékeztető összefoglalásán, kidolgozott mintapéldákon keresztül elősegítse az anyag megértését, majd kellő számú gyakorló feladatot nyújt ahhoz, hogy hallgatóink az alkalmazásokhoz szükséges készségüket kifejlesszék.

Az anyagot két részre osztottam: az első rész a differenciálhányados fogalmának elmélyítését és számítási módjának elsajátítását célozza; e rész a fogalmakat különböző alkalmazásokon keresztül igyekszik megvilágítani. A második rész további alkalmazásokat tartalmaz.

Bizonyára e feladatgyűjteményben számos hiányosság található, annál is inkább, mivel bizonyos tekintetben újszerű, s első próbálkozás. Ezúton kérem az olvasók szíves megjegyzéseit és helyesbítéseit.

Az anyag összeállításában a műszaki egyetemi matematika-előadások és gyakorlatok anyagának szemmeltartásával számos feladatgyűjteményt használtam forrásul. A felhasznált irodalom jegyzékét a kötet végén állítottam össze.

Jelen kötet megjelenésének elősegítéséért köszönetet mondok Fazekas Ferenc főszerkesztőnek, a Közoktatásügyi Minisztérium egyetemi tankönyvosztályának, dr. Mátrai László nak, s mindazoknak, akiknek bizalma és állandó támogatása munkámban segítségemre volt. Külön köszönettel tartozom Gyurcsy Endrének, aki a szemléltető anyag elkészítésével kapcsolatban mindenben készséggel teljesítette kívánságaimat.

Budapest, 1952. január 10. *BAJCSAY PÁL*

ELŐSZÓ E KÖTET ÖTÖDIK KIADÁSÁHOZ

Az egyváltozós valós függvények differenciálszámítása tárgyköréből e kötetben szereplő tananyag teljes egészében a „klasszikus" analízishez tartozik. Az évek során korszerűsödött műszaki egyetemi matematikaoktatásban ezt az anyagrészt kevés változtatással tanítjuk.

Éppen ezért ez a kiadás — apróbb javításoktól eltekintve — azonos az előzőkkel.

Egyedül a függvény fogalmát kell pontosabbá tenni. A modern felfogásban egyváltozós valós függvénynek nevezzük azt az f függvényt, amelynek értelmezési tartománya és értékkészlete is a valós számok R halmazának részhalmaza; ha X az f függvény értelmezési tartománya és Y az értékkészlete, továbbá $y \in Y$ az f függvénnyel $x \in X$-hez hozzárendelt függvényérték, akkor $y=f(x)$ jelöli az f függvény x helyen vett helyettesítési értékét. A kötetben szereplő példákban és feladatokban általában f valamely képlettel megadott függvényt jelent, és így a „klasszikus" jelöléseket mindenütt megtarthattuk.

Budapest, 1974. november 21.

DR. BAJCSAY PÁL

TARTALOMJEGYZÉK

Első rész

A differenciálhányados fogalma, számítása és alkalmazásai

1. §. *A differenciahányados és a differenciálhanyados fogalma*

a) Differenciahányados és differenciálhányados 11
b) A derivált függvény. Jobb és bal oldali derivált 13

2. §. *A differencia- és differenciálhányados geometriai és fizikai jelentése. Differenciál. „Véges növekmények" tétele*

a) Szelő és érintő iránytangense 16
b) Átlagos és lokális relatív függvényérték-változás 17
c) Differenciálhatóság 17
d) Differenciál, véges növekmények tétele 18
e) Fizikai példák és feladatok 19
f) Geometriai példák és feladatok 26
g) Függvényérték-változás fórész és elenyésző rész összegeként 32

3. §. *A differenciálhányados kiszámítása, differenciálási szabályok*

a) Elemi függvények differenciálhányadosa 34
α) $y=c=$ állandó 34
β) Állandóval szorzott függvény: $y=c\cdot f(x)$ 34
b) Hatványfüggvények 35
α) $y=x^n$, (n pozitív egész szám) 35
β) Pozitív egészkitevős hatványfüggvények 36
γ) Negatív egészkitevős hatványfüggvények 37
c) Trigonometrikus függvények 39
α) $y=\sin x$ 39
β) $y=\cos x$ 40
γ) $y=\operatorname{tg} x$ 41
δ) $y=\operatorname{ctg} x$ 42
d) Exponenciális függvények 42
α) $y=a^x$, $a>0$ 42
β) $y=e^x$ 43
γ) Érintőszerkesztés 43
e) Hiperbolikus függvények 44
α) $y=\operatorname{sh} x$ 44
β) $y=\operatorname{ch} x$ 45
γ) $y=\operatorname{th} x$ 46
δ) $y=\operatorname{cth} x$ 46
f) Logaritmus függvények 47
α) $y=\ln x$ 47
β) $y={}^a\log x$ 47
g) Összegfüggvény differenciálhányadosa 48
h) Szorzatfüggvény differenciálhányadosa 48
i) Hányados-, törtfüggvény differenciálhányadosa 49

j) Inverz függvény differenciálhányadosa 49
k) Törtkitevős hatványfüggvény differenciálása 50
l) Gyakorló feladatok az előző szabályok alkalmazására 50
α) Polinomok 50
β) Negatív és törtkitevős hatványfüggvények összege és különbsége 51
γ) Szorzat- és törtfüggvények 51
δ) Néhány egyszerű transzcendens függvény differenciálhányadosa 52
m) Összetett függvény differenciálása (láncszabály) 54
n) Logaritmikus differenciálás 56
o) Implicit függvény differenciálása 59
p) Paraméteres alakban megadott függvények differenciálása 59
q) Polárkoordinátás függvények 63

4. §. *Magasabbrendű differenciálhányadosok*

a) Egytagúak 65
b) Összeg és különbség 68
c) Leibniz-szabály 69

5. §. *A differenciálszámítás középértéktétele*

Második rész

A differenciálszámítás egyéb alkalmazásai

6. §. *Határozatlan alakra vezető határértékek számítása (Bernoulli—l'Hospital szabálya)*

a) $\frac{0}{0}$-alakra vezető határértékek 74
b) $\frac{\infty}{\infty}$-alakra vezető határértékek 75
c) $0 \cdot \infty$-alakra vezető határértékek 75
d) $(\infty - \infty)$-alakra vezető határértékek 75
e) 1^{∞}, 0^0, ∞^0-alakra vezető határértékek 75
f) Gyakorló feladatok 77

7. §. *Függvényvizsgálat, görbediszkusszió*

8. §. *Szélsőérték-példák és -feladatok*

9. §. *Görbület, görbületi kör, evoluta, evolvens*

a) Görbület 88
b) Görbületi kör 88
c) Evoluta, evolvens 89

10. §. *Véges növekmények. Differenciálok*

a) Véges növekmények tétele 95
b) Differenciálok 95

Megoldások

ELSŐ RÉSZ

A DIFFERENCIÁLHÁNYADOS FOGALMA, SZÁMÍTÁSA ÉS ALKALMAZÁSAI

1. § A DIFFERENCIAHÁNYADOS ÉS A DIFFERENCIÁLHÁNYADOS FOGALMA

a) Differenciahányados és differenciálhányados

Az f függvényt, amelynek x helyen a helyettesítési értékét $y=f(x)$-szel jelöljük, az $x=x_0$ hely környezetében vizsgálva, a független változó Δx megváltozásához a függvényérték $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ megváltozása tartozik.

Az összetartozó Δy és Δx növekmények (különbségek, differenciák) hányadosa a függvény $(x_0,\ x_0+\Delta x)$ szakaszhoz tartozó *differenciahányadosa (különbségi hányadosa)*:

eredeti függvényérték: $y_0=f(x_0)$,

megváltozott függvényérték: $y_0+\Delta y=f(x_0+\Delta x)$,

függvényérték megváltozása: $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,

$$\text{differenciahányados: } \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ha a $\Delta x\to 0$ határátmenet esetén a $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ hányados véges határértékhez tart, akkor e határérték adja a függvény $x=x_0$ helyhez tartozó *deriváltját*, *differenciálhányadosát*:

$$\text{differenciálhányados: } \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\dot{y}=f'(x_0)=\frac{d}{dx}y=\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Példák:

1. Határozzuk meg az $f(x)=x^2$ függvény differenciahányadosát az $x=2$ helyen, ha $\Delta x=0{,}01$.

$$y=f(2)=2^2=4,$$

$$\left.\begin{array}{l} y+\Delta y=f(2+0{,}01)=2{,}01^2=4{,}0401 \\ \Delta y=0{,}0401 \end{array}\right\},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0{,}0401}{0{,}01}=4{,}01.$$

2. Határozzuk meg az $f(x)=x^2$ függvény deriváltját az $x=2$ helyen.

$$y=f(2)=2^2=4,$$

$$\left.\begin{array}{l} y+\Delta y=f(2+\Delta x)=(2+\Delta x)^2=4+4\Delta x+\Delta x^2 \\ \Delta y=4\Delta x+\Delta x^2 \end{array}\right\},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=4+\Delta x.$$

Ha $\Delta x\to 0$, akkor $4+\Delta x\to 4$, tehát

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2}=f'(2)=4.$$

*

Határozzuk meg az alábbi függvények adott x_0 helyhez tartozó differenciahányadosát, az adott Δx értékek esetén és általánosan is, tetszés szerinti Δx-szel, majd képezzük határátmenettel a függvény x_0 helyhez tartozó deriváltját:

3. $y=2x^3$; $x_0=1$; $\Delta x=0{,}1$; $0{,}01$; $0{,}001$.

4. $y=\frac{1}{x}$; $x_0=2$; $\Delta x=0{,}1$; $0{,}01$; $0{,}001$.

5. $y=x+2x^2$; $x_0=1{,}2$; $\Delta x=0{,}1$; $0{,}01$; $0{,}001$.

6. $y=2x-3x^4$; $x_0=1$; $\Delta x=0{,}2$; $0{,}1$.

7. $y=5x^2-3$; $x_0=2$; $\Delta x=1{,}2$; 1; $0{,}5$; $0{,}1$.

8. $y=\frac{2}{4x-3}$; $x_0=1{,}5$; $\Delta x=0{,}5$; $0{,}2$; $0{,}1$.

9. $y=\frac{1}{3x^2}$; $x_0=1$; $\Delta x=1$; $0{,}1$; $0{,}01$.

10. $y=\frac{x+1}{x-1}$; $x_0=3$; $\Delta x=0{,}1$; $0{,}01$; $0{,}001$.

11. $y=\sqrt{x^2-1}$; $x_0=2$; $\Delta x=0{,}1$; $0{,}01$.

12. $y=\sin x$; $x_0=\frac{\pi}{2}$; $\Delta x=0{,}1$.

13. $y=e^x$; $x_0=1$; $\Delta x=0{,}1$.

14. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$; $x_0=3$; $\Delta x=0{,}1$; 0,01; 0,001.

15. $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$; $x_0=2$; $\Delta x=0{,}1$.

16. $y=5-\dfrac{2}{x^2}$; $x_0=1$; $\Delta x=0{,}2$; 0,02; 0,002.

17. $y=x+\dfrac{1}{x}$; $x_0=4$; $\Delta x=0{,}1$; 0,01.

18. $y=x+\sqrt{2x-1}$; $x_0=13$; $\Delta x=0{,}1$.

19. $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x+3}$; $x_0=1$; $\Delta x=0{,}2$

20. $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x}+1}$; $x_0=4$; $\Delta x=0{,}5$.

b) A derivált függvény. Jobb és bal oldali derivált

Általában, ha az x független változó bizonyos intervallumának minden helyén az $f(x)$ függvény differenciahányadosának véges határértéke van, tehát $f(x)$ deriváltja létezik, akkor ott a *derivált maga is x-nek valamely függvénye.*

Az $f'(x)$ derivált függvény *létezésének feltétele* az, hogy mindegyik, bármily kicsiny, tetszőlegesen megadott pozitív ε számhoz található legyen egy pozitív δ úgy, hogy fennálljon:

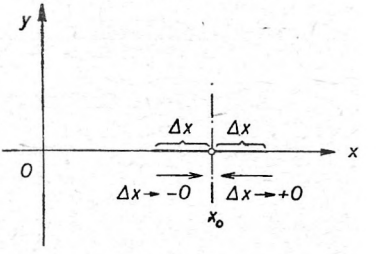
$$\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x)\right|<\varepsilon, \text{ ha} |\Delta x|<\delta.$$

Egy x-hely környezetében értelmezett (egyértékű) függvényt e helyen *differenciálhatónak* nevezünk, ha differenciahányadosa a $\Delta x\to 0$ határátmenetnél (ennek módjától függetlenül) véges határértékhez, éppen az x-helyhez tartozó deriválthoz tart.

Ha a független változó Δx növekménye csupa pozitív, vagy csupa negatív értéken keresztül tart 0-hoz (jelekben: $\Delta x\to +0$, illetve $\Delta x\to -0$) (l. 1. ábra), akkor (feltételezve, hogy e feltétel mellett van a differenciahányadosnak véges határértéke) adódik a

jobb oldali derivált: $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'_+(x_0)$,

bal oldali derivált: $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'_-(x_0)$.



1. ábra.

Ha az x_0-helyen a jobb és bal oldali derivált egyenlő, akkor x_0 környezetében az $f(x)$ *görbe íve sima.* Ha a két különböző oldali derivált különböző értékű, akkor a függvény *jobbról* és *balról* is külön-külön *differenciálható,* de a szó szoros értelmében nem (a határérték nem független a határátmenet módjától).

P é l d á k :

1. Határozzuk meg az $y=f(x)=x^2-2x+1$ függvény deriváltját az $x=1$, 2, 2,5 helyeken, majd tetszőleges x helyen, tehát magát a derivált függvényt.

a) $$f(1)=1^2-2\cdot 1+1=0,$$

$$\frac{f(1+\Delta x)=(1+\Delta x)^2-2(1+\Delta x)+1=\Delta x^2}{\Delta y=\Delta x^2},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x;\ f'(1)=0.$$

b) $$f(2)=2^2-2\cdot 2+1=1,$$

$$\frac{f(2+\Delta x)=(2+\Delta x)^2-2(2+\Delta x)+1=1+2\Delta x+\Delta x^2}{\Delta y=2\Delta x+\Delta x^2},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2+\Delta x;\ f'(2)=2.$$

c) $$f(2{,}5)=2{,}5^2-2\cdot 2{,}5+1=2{,}25,$$

$$\frac{f(2{,}5+\Delta x)=(2{,}5+\Delta x)^2-2(2{,}5+\Delta x)+1=2{,}25+3\Delta x+\Delta x^2}{\Delta y=3\Delta x+\Delta x^2},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3+\Delta x;\ f'(2{,}5)=3.$$

Mint látható, a *derivált értéke* x megválasztásától függ, tehát *x-nek függvénye*. Hogy x-nek milyen függvénye, azt is meg tudjuk határozni:

$$f(x)=x^2-2x+1,$$

$$\frac{f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x)+1=x^2+2x\cdot\Delta x+\Delta x^2-2x-2\Delta x+1}{\Delta y=2x\cdot\Delta x-2\Delta x+\Delta x^2},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x-2+\Delta x\to 2x-2,\ \text{ha}\ \Delta x\to 0.$$

Tehát az adott függvény deriváltja, tetszőleges x-helyen:

$$f'(x)=2x-2.$$

Előbbi eredményeink ellenőrzéséül szolgál, hogy $f'(x)$ az adott x-helyeken épp a fentebb kiszámított értékeket veszi fel.

2. Állapítsuk meg, hogy az $y=x^3$ függvény $x=1$ helyen vett deriváltja és differenciahányadosa közti eltérés mekkora Δx esetén lesz legfeljebb 0,01 nagyságú. (Tegyük fel azt, hogy $\Delta x\geqq 0$.)

$$y=1^3=1,$$

$$\frac{y+\Delta y=(1+\Delta x)^3=1+3\Delta x+3\Delta x^2+\Delta x^3}{\Delta y=3\Delta x+3\Delta x^2+\Delta x^3},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3+3\Delta x+\Delta x^2\to 3,\ \text{ha}\ \Delta x\to 0.$$

Az eltérés: $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(1)\right| = |(3+3\Delta x+\Delta x^2)-3| = 3\Delta x+\Delta x^2 = 0{,}01.$

Megoldandó tehát Δx-re a következő egyenlet:

$$\Delta x^2+3\Delta x-0{,}01=0.$$

$$\Delta x=\frac{-3\pm\sqrt{9+0{,}04}}{2}=\frac{-3\pm 3{,}0066}{2}=\begin{cases}0{,}0033,\\-3{,}0033.\end{cases}$$

Csak a pozitív gyököt véve figyelembe, $\Delta x<0{,}0033$ esetén

$$\left|\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}-f'(1)\right|<0{,}01.$$

3. Határozzuk meg az $y=f(x)=|x|$ függvény deriváltját az $x=0$ helyen. (L. 2. ábra.)

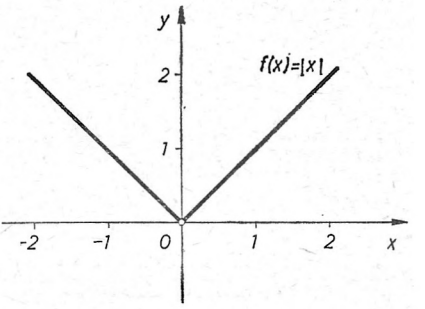
A függvény másképp így írható:

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{ha } x\geqq 0,\\ -x, & \text{ha } x<0.\end{cases}$$

A differenciahányados értéke az $x=0$ helyen más-más, aszerint, hogy Δx pozitív vagy negatív előjelű.

$$f(0)=0,$$

$$\frac{f(0+\Delta x)=|\Delta x|}{\Delta y=|\Delta x|}.$$



2. ábra.

Ha $\Delta x>0$, akkor

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{|\Delta x|}=+1,$$

jobb oldali derivált.

Ha $\Delta x<0$, akkor

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{-|\Delta x|}=-1,$$

bal oldali derivált.

Tehát a függvénynek az $x=0$ helyen a jobb és bal oldali deriváltja különböző!

*

Állapítsuk meg, hogy az alábbi függvények adott x_0 helyen számított deriváltja és differenciahányadosa közti eltérés mekkora Δx érték esetén lesz legfeljebb az adott H-val egyenlő (lásd a 2. példát!):

4. $y=\frac{1}{x}$; $x_0=2$; $H=0{,}1$.

5. $y=\sqrt{x+1}$; $x_0=3$; $H=0{,}05$.

6. $y=\frac{1}{x^2}$; $x_0=1$; $H=0{,}2$.

7. $y=3x-2x^2$; $x_0=2$; $H=0{,}1$.

8. $y=\dfrac{x}{2x-1}$; $x_0=1$; $H=0{,}01$.

Képezzük az alábbi függvények jobb és bal oldali deriváltját a megadott x_0 helyen:

9. $y=x+|x|$; $x_0=0$.

10. $y=\begin{cases}2x; & \text{ha } x\leqq 1;\\ 3-x; & \text{ha } x\geqq 1;\end{cases}$ $x_0=1$.

11. $y=\begin{cases}x-x^2; & \text{ha } x\leqq 1;\\ -x^2+3x-2; & \text{ha } x\geqq 1;\end{cases}$ $x_0=1$.

12. $y=\begin{cases}3x-1; & \text{ha } x\leqq 2;\\ 5; & \text{ha } x\geqq 2;\end{cases}$ $x_0=2$.

13. $y=\begin{cases}e^x; & \text{ha } x\leqq 0;\\ e^{-x}; & \text{ha } x\geqq 0;\end{cases}$ $x_0=0$.

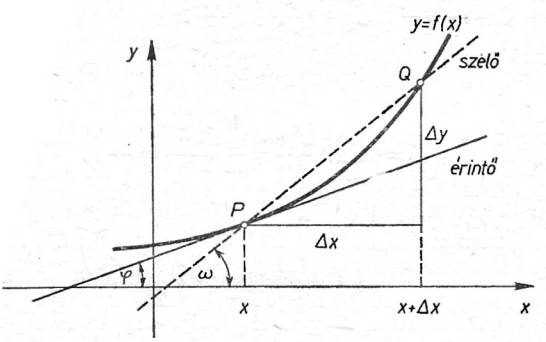
14. $y=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}; & \text{ha } x\leqq 0;\\ 1-x; & \text{ha } x\geqq 0;\end{cases}$ $x_0=0$.

15. $y=\begin{cases}-x; & \text{ha } x\leqq 0;\\ x^2; & \text{ha } x\geqq 0;\end{cases}$ $x_0=0$.

2. §. A DIFFERENCIA- ÉS DIFFERENCIÁLHÁNYADOS GEOMETRIAI ÉS FIZIKAI JELENTÉSE. DIFFERENCIÁL. „VÉGES NÖVEKMÉNYEK" TÉTELE

a) **Szelő és érintő iránytangense**

A differenciahányados geometriailag az $y=f(x)$ függvény* görbéje azon *szelő*jének *iránytangensét* jelenti, mely a Δx hosszúságú szakasz két végpontjához tartozó görbepontokon megy át. (L. 3. ábra):



3. ábra.

a szelő iránytangense: $\operatorname{tg}\omega=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

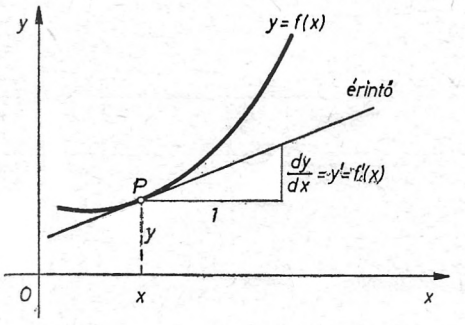
* Feltesszük azt, hogy $f'(x)$ létezik és, hogy a görbének van érintője az x helyen.

Ha $\Delta x \to 0$, akkor $Q \to P$ és közben a szelő P körül befordul határhelyzetébe, a P-beli érintőbe. Ugyanakkor $\omega \to \varphi$ és így $\operatorname{tg}\omega \to \operatorname{tg}\varphi$, tehát

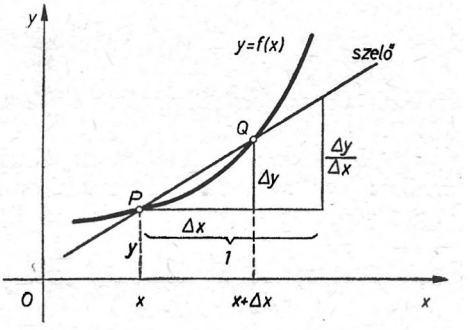
az érintő iránytangense:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

A differenciálhányados geometriailag a görbe x abszcisszájú P pontjához húzott *érintő iránytangensét* jelenti. (L. 4. ábra.)



4. ábra.



5. ábra.

b) **Átlagos és lokális relatív függvényérték-változás**

Ha a függvény görbéjét az x és $x+\Delta x$ abszcisszájú görbepontokra illesztett szelővel helyettesítjük és a függvény értékváltozását a szelőegyenesig mérjük, akkor a differenciahányados az egyenes mentén történő viszonylagos (relatív) függvényérték-változást méri. Tehát a *differenciahányados* a független változó egységnyi megváltozásához tartozó, Δx közre eső, *átlagos vagy közepes viszonylagos (relatív) függvényérték-változást* jelenti. (L. 5. ábra.)

Ha a függvény görbéjét az x-hely környezetében, e helyhez tartozó érintőjével helyettesítjük és a függvény értékváltozását az érintőig mérjük, akkor a differenciálhányados az érintő mentén történő viszonylagos függvényérték-változást méri. Tehát a *differenciálhányados* az x helyhez tartozó *helyi (lokális) viszonylagos (relatív) függvényérték-változást* jelenti.

c) **Differenciálhatóság**

Ha az egységnyi független változó értékmegváltozásához, az érintőig mérve $f'(x)$ függvényérték megváltozás tartozik, akkor Δx-hez $f'(x)\Delta x$.

Ha Δx elég „*kicsiny*", akkor közelítéssel:

$$\Delta y \approx f'(x)\cdot\Delta x.$$

Pontosan:

$$\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + H,$$

ahol H jelenti a görbe érintővel való helyettesítéséből eredő eltérést (hibát).

Osszuk el az egyenlőség mindkét oldalát Δx-szel:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\frac{H}{\Delta x}.$$

Ha $\Delta x\to 0$, akkor, $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to f'(x)$, így $\frac{H}{\Delta x}$-nek 0-hoz kell tartania, azaz $\frac{H}{\Delta x}=\varepsilon$ egy Δx-szel együtt elenyésző, 0-hoz tartó *„kicsiny"* mennyiség.

A

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{H}{\Delta x}=0$$

határérték az $f(x)$ függvény *differenciálhatóságá*nak feltétele, más alakban. (L. 11. o.)

A fentiek értelmében az f függvényt [amelynek x-hez tartozó helyettesítési értéke: $y=f(x)$] az x helyen akkor mondjuk *differenciálható*nak, ha megadható egy Δx-től független $f'(x)$ kifejezés úgy, hogy a

$$\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\varepsilon\cdot\Delta x$$

összefüggésben $\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon=0$.

Differenciál, véges növekmények tétele

A $\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\varepsilon\cdot\Delta x$ kifejezésben az

$f'(x)\cdot\Delta x$ a *„főrész"*,

és az

$\varepsilon\cdot\Delta x$ az *„elenyésző rész"*. (L. 6. ábra.)

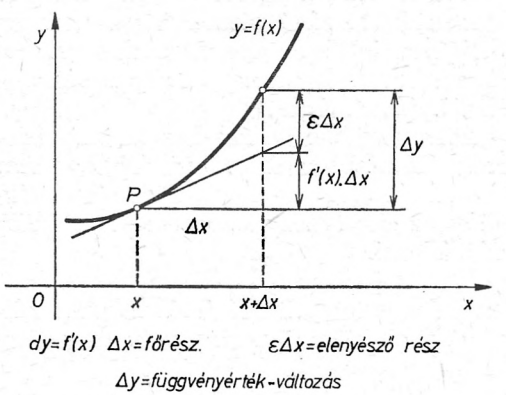
Csak a főrészre szorítkozva, az egyenlőség így írható:

$$dy=f'(x)dx,$$

ahol dy és dx az y és x változóknak ún. *differenciál*jai. Ez az egyenlőség a

$$\Delta y\approx f'(x)\Delta x$$

közelítő egyenlőséggel azonos értelmű. A d betű használata Δ helyett azt fejezi ki, hogy a pontos egyenlőség csak a $\Delta x\to 0$ határátmenet esetén áll fenn!



6. ábra.

A $\Delta y\approx f'(x)\Delta x$, illetve $dy=f'(x)dx$ egyenlőség azt jelöli, hogy a *függvényérték változása „kicsiny"-ben jó közelítéssel homogén lineáris függvénye a független változó értékváltozásának.* Ennek alapján számíthatjuk véges, kicsiny Δx-ekhez tartozó Δy-ok értékét! Az egyenlőség az ún. *„véges növekmények" tételét* fejezi ki. (Erre vonatkozó példákat l. 95. o.)

d) **Fizikai példák és feladatok**

1. Egy tetszőleges pontmozgás út—idő függvénye:

$$s=s(t).$$

A mozgás t időpontban levő sebességét a következőképpen számíthatjuk ki:

Kiszámítjuk az adott (vagy tetszőleges) Δt időközre eső útváltozást (megtett utat):

$$\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t).$$

Ezt osztjuk Δt-vel:

$$\boxed{\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}.}$$

Az így nyert differenciahányados a t időponttól mért Δt időközre eső átlagos, vagy közepes sebességet adja.

Ha vesszük ennek határértékét a $\Delta t\to 0$ határátmenettel, akkor kapjuk a függvény differenciálhányadosát:

$$\boxed{\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=v(t).}$$

Ez adja a t időponthoz tartozó pillanatnyi sebességet.

Általában ez a differenciálhányados függ az időtől, vagyis eredményünk a mozgás sebesség—idő függvénye:

$$v=v(t).$$

Ha ez nem állandó, azaz változó sebességű mozgásnál beszélhetünk a Δt időközre eső átlagos vagy közepes sebességváltozásról, illetve a pillanatnyi sebességváltozásról (gyorsulásról). Ezek számítása a $v=v(t)$ függvényből ugyanúgy történik:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$

a t időponttól mért, Δt időközre eső átlagos, közepes gyorsulás;

$$\frac{dv}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=a$$

a pillanatnyi gyorsulás.

(Ha a vizsgált változó mozgás olyan, hogy a kiszámított pillanatnyi gyorsulás nem állandó, hanem az időnek függvénye: $a=a(t)$, akkor természetesen beszélhetünk a gyorsulás valamely időközre eső átlagos, közepes, illetve pillanatnyi viszonylagos (relatív, időegységre eső) megváltozásáról is, melyeket a gyorsulás—idő függvény differencia-, illetve differenciálhányadosa adja. Ezeknek azonban nem szokás külön fizikai jelentést és külön elnevezést adni.)

2. *Egyenesvonalú egyenletes pontmozgás* fizikai jellemzője az, hogy a pont az egyenesvonalú pályán minden egyenlő időközben egyenlő nagyságú útszakaszt fut be. Azaz kétszer, háromszor, ... annyi idő alatt a megtett út ugyancsak kétszer, háromszor, ... akkora, tehát

az út az idővel arányosan változik, a megtett út az időnek elsőfokú (lineáris) függvénye. Jelentse s az utat, t az időt, v az arányossági tényezőt és s_0 a mozgó pontnak $t_0 = 0$ időpontban az $s = 0$ helytől mért távolságát, helyzetét.

A mozgás út—idő függvénye

$$s = vt + s_0.$$

Vizsgáljuk a mozgást $(t,\ t + \Delta t)$ időközben. Δt idő elteltével a pont

$$s + \Delta s = v \cdot (t + \Delta t) + s_0$$

helyen lesz. A Δt időkülönbséghez (differenciához) tartozó út-változás (differencia):

$$\Delta s = v \cdot \Delta t.$$

Ha Δt-vel osztjuk egyenlőségünk mindkét oldalát, a

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v = \text{állandó}$$

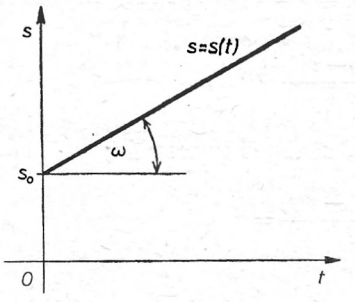
kifejezést nyerjük. Ennek fizikai jelentését igen egyszerű megtalálni. $\Delta t = 1$ esetén, azaz egységnyi időközben a megtett út $\Delta s = v = \text{állandó}$. A

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v$$

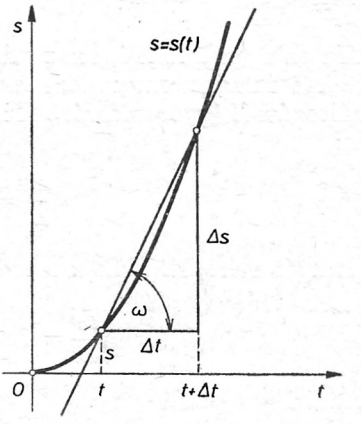
differenciahányados az egyenesvonalú egyenletes *mozgás sebességét* jelenti.

Az út—idő függvény ábráján (a mozgás ún. *menetdiagramján*) ez geometriailag az ω hajlásszög tangensét jelenti (lásd 7. ábra):

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v = \operatorname{tg} \omega = \textit{sebesség}.$$



7. ábra.



8. ábra.

Minthogy a nyert differenciahányados $v = \text{állandó}$, tehát nem függ a Δt időintervallumtól, ezért

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v = \text{állandó}.$$

A differencia- és differenciálhányados ugyanazt az értéket adja. Ez esetben tehát mindkettőnek fizikai jelentése is azonos: a mozgás sebessége.

3. A nehézségi erőtérben (a közegellenállás figyelmen kívül hagyásával) *szabadon eső test* út—idő függvényét az

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

összefüggés adja, ahol $g(\approx 10\ \mathrm{m/s^2})$ a nehézségi gyorsulás (állandó). (A kezdősebességet $v_0=0$-nak vettük.)

Vizsgáljuk a mozgást t és $t+\Delta t$ közti idő alatt (lásd 8. ábra). $t+\Delta t$ időpontban a test által megtett út

$$s+\Delta s=\frac{1}{2}g\cdot(t+\Delta t)^2=\frac{1}{2}gt^2+gt\,\Delta t+\frac{1}{2}g\Delta t^2.$$

A Δt időközhöz tartozó út (-különbség):

$$\Delta s=gt\Delta t+\frac{1}{2}g\Delta t^2.$$

Mindkét oldalt Δt-vel osztva

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=gt+\frac{1}{2}g\Delta t.$$

Ez a függvény differenciahányadosa; jelenti a t időponttól mért Δt időközre eső *átlagos vagy közepes sebességet*. Ha a t időpontban levő *pillanatnyi sebességre* vagyunk kíváncsiak, akkor a Δt időközt kell minden határon túl csökkentenünk. Azaz vennünk kell a függvény differenciálhányadosát:

$$v(t)=\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{1}{2}g\Delta t\right)=gt.$$

4. Szabadon eső test sebesség—idő függvénye (az első példa végeredményével):

$$v=gt.$$

Ha a t idő megnövekszik Δt-vel, a sebesség is megnövekszik Δv-vel:

$$v+\Delta v=g\cdot(t+\Delta t).$$

A sebességváltozás:

$$\Delta v=g\Delta t.$$

A mozgás *gyorsulása:*

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=g.$$

S minthogy ez állandó, nyilván nemcsak az átlagos, közepes gyorsulás értéke, hanem bármely időpontban levő pillanatnyi gyorsulás értéke is:

$$\frac{dv}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=g.$$

5. Egy vékony, egyenes rúd *egyenesmenti tömegeloszlását* az $m=m(x)$ függvény fejezi ki. x-től $x+\Delta x$-ig terjedő hosszának tömege

$$\Delta m=m(x+\Delta x)-m(x).$$

A

$$\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}$$

differenciahányados méri a Δx hosszra eső viszonylagos, közepes tömeget, azaz az *átlagsűrűséget.*

Ha a differenciahányados határértékét vesszük $\Delta x \to 0$ határátmenet esetén, akkor nyerjük a

$$\frac{dm}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x+\Delta x) - m(x)}{\Delta x}$$

differenciálhányadost, mely a rúd x helyen levő *helyi (lokális) sűrűségét* méri. Ha ez a kifejezés mindenütt állandó értékű, akkor a tömegeloszlást homogénnak mondjuk, ellenkező esetben, ha a sűrűség helyről helyre változik, a rúd inhomogén tömegeloszlású.

6. Állandó hőmérsékleten a gáz nyomása (p) és térfogata (v) közötti összefüggést a *Boyle—Mariotte-törvény* fejezi ki:

$$p = \frac{p_0 v_0}{v} = \frac{c}{v}.$$

Növeljük meg a gáz térfogatát v-ről $v+\Delta v$-re. A nyomás megváltozott értéke:

$$p + \Delta p = \frac{c}{v+\Delta v}.$$

A nyomásváltozás:

$$\Delta p = \frac{c}{v+\Delta v} - \frac{c}{v} = c\,\frac{v-(v+\Delta v)}{v(v+\Delta v)} = -\frac{c}{v(v+\Delta v)}\,\Delta v.$$

A

$$\frac{\Delta p}{\Delta v} = -\frac{c}{v(v+\Delta v)}$$

differenciahányados a Δv térfogatváltozás esetén az egységnyi térfogatváltozáshoz tartozó átlagos, közepes nyomásváltozást jelenti.

Ha Δv minden határon túl csökken, $\Delta v \to 0$, elenyészik, akkor a $\frac{\Delta p}{\Delta v}$ határértéke a pillanatnyi viszonylagos (relatív) nyomásváltozás értékét adja:

$$\frac{dp}{dv} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{-c}{v(v+\Delta v)} = -\frac{c}{v^2}.$$

A negatív előjel arra utal, hogy a nyomás és térfogat változása ellenkező értelmű, azaz növekvő térfogathoz csökkenő nyomás tartozik.

7. *Domború lencse* képalkotásának alapegyenlete:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f},$$

ahol f a fókusztávolság, t a tárgytávolság, k a képtávolság. A három mennyiség közül egy ugyanazon lencsénél a fókusztávolság állandó, s csak a tárgy- és képtávolság változhat. Kérdés az, hogy a tárgytávolság változtatásával hogyan változik a képtávolság?

Először is az alapegyenletből kifejezzük k-t mint t függvényét:

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{f}-\frac{1}{t}=\frac{t-f}{tf},$$

tehát

$$k=\frac{tf}{t-f}.$$

Növeljük meg t-t Δt-vel, akkor k megváltozott értéke lesz:

$$k+\Delta k=\frac{f\cdot(t+\Delta t)}{(t+\Delta t)-f}.$$

k megváltozása:

$$\Delta k=\frac{f\cdot(t+\Delta t)}{(t+\Delta t)-f}-\frac{f\cdot t}{t-f}=-\frac{f^2\cdot\Delta t}{[(t+\Delta t)-f](t-f)}.$$

A differenciák hányadosa:

$$\frac{\Delta k}{\Delta t}=-\frac{f^2}{[(t+\Delta t)t-f](t-f)}.$$

Ez fejezi ki a tárgytávolság t-ről $t+\Delta t$-re való növekedéséhez tartozó átlagos, közepes viszonylagos (relatív) képtávolság megváltozását.

Ha a pontos, pillanatnyi viszonylagos (relatív) megváltozás értékét keressük, akkor $\Delta t\to 0$ határátmenettel $\frac{\Delta k}{\Delta t}$ határértékét kell vennünk:

$$\frac{dk}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta k}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{-f^2}{[(t+\Delta t)-f](t-f)}=-\frac{f^2}{(t-f)^2}.$$

A negatív előjel arra utal, hogy a képtávolság megváltozása mindig ellenkező értelmű, mint a tárgytávolság megváltozása, azaz a tárgytávolság növekedése a képtávolság csökkenését vonja maga után.

8. *A domború lencse nagyítása:*

$$N=\frac{k}{t}=\frac{f}{t-f}.$$

Növeljük meg a tárgytávolságot Δt-vel; a nagyítás megváltozott értéke:

$$N+\Delta N=\frac{f}{(t+\Delta t)-f}.$$

A nagyítás megváltozása:

$$\Delta N=\frac{f}{(t+\Delta t)-f}-\frac{f}{t-f}=\frac{-f\cdot\Delta t}{[(t+\Delta t)-f](t-f)}.$$

A differenciák hányadosa, azaz a nagyítássérték közepes viszonylagos (relatív) megváltozása:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t}=-\frac{f}{[(t+\Delta t)-f](t-f)}.$$

A pillanatnyi viszonylagos megváltozás értékét a differenciálhányados adja:

$$\frac{dN}{dt}=-\frac{f}{[(t-f)^2}.$$

A negatív előjel ismét arra utal, hogy a két változó mennyiség megváltozása ellenkező értelmű.

9. Két, m_1 és m_2 nagyságú, egymástól r távolságra levő tömeg egymásra

$$F=f\frac{m_1m_2}{r^2}$$

nagyságú vonzóerőt gyakorol, *Newton tömegvonzási törvénye* értelmében. f arányossági tényező, amelynek értéke $668\cdot10^{-10}$, ha minden mennyiséget CGS-egységben számítunk.

Ha a tömegek közti kölcsönös távolság Δr-rel megváltozik, az erő megváltozott értéke:

$$F+\Delta F=f\frac{m_1m_2}{(r+\Delta r)^2}.$$

Egyszerűség kedvéért vezessük be az $fm_1m_2=c$ jelölést. Az erő megváltozása:

$$\Delta F=\frac{c}{(r+\Delta r)^2}-\frac{c}{r^2}=c\,\frac{-2r\,\Delta r-\Delta r^2}{(r+\Delta r)^2\cdot r^2}.$$

A differenciahányados:

$$\frac{\Delta F}{\Delta r}=-c\,\frac{2r+\Delta r}{(r+\Delta r)^2\cdot r^2}.$$

Ez méri a Δr változásra eső átlagos, közepes viszonylagos (relatív) erőmegváltozás nagyságát.

Az r távolság elenyésző megváltozásához tartozó viszonylagos (relatív) erőmegváltozás nagyságát a differenciálhányados adja:

$$\frac{dF}{dr}=\lim_{\Delta r\to0}\left[-c\,\frac{2r+\Delta r}{(r+\Delta r)^2\cdot r^2}\right]=-c\,\frac{2r}{r^4}=-2f\frac{m_1m_2}{r^3}=-2\frac{F(r)}{r}.$$

A negatív előjel az erő és távolság megváltozásának ellenkező értelmére utal.

*

Az előző feladatokhoz hasonlóan adjunk fizikai értelmezést az alábbi, fizikai törvényeket kifejező függvények differencia- és differenciálhányadosának:

10. Az állandó R ellenállású vezetőben folyó egyenáram I erőssége és az U feszültség közti összefüggést fejezi ki *Ohm törvénye:*

$$U = I \cdot R.$$

11. Lineáris harmonikus rezgőmozgás esetén, a nyugalmi helyzettől mért x kitéréssel arányos és a nyugalmi helyzet felé mutató F visszatérítő erő működik:

$$F = -k \cdot x.$$

(k arányossági tényező.)

12. Az O ponttól r távolságban ható F erőnek e pontra vonatkozó statikai nyomatéka:

$$M = F \cdot r.$$

13. A $t_0 = 0$ hőfokon $v = v_0$ térfogatú szilárd test hőmérsékletét valamely t hőfokra emelve, a térfogat a következő képlettel adódik:

$$v = v_0(1 + \gamma t),$$

ahol γ arányossági tényező, a szilárd testre jellemző, hőokozta térfogattágulás együtthatója.

14. Az állandónak tekintett m tömegű test kinetikus energiája:

$$E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2,$$

ahol v jelenti a mozgás sebességét.

15. Az l hosszúságú matematikai inga lengésideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

$g = 981$ cm s^{-2}, a szabadon eső test gyorsulása.

*

Az alábbi feladatokban az adott $s = s(t)$ függvény valamely pontmozgás út—idő függvénye. Határozzuk meg az adott t időpontban a kezdőponttól mért elmozdulást, a sebességet és a gyorsulást; azonkívül számítsuk ki, hogy mely időpontban éri el a sebesség először a zérus értéket:

16. $s = 2t^3 - 15t^2 + 36t + 10$; $t = 1$.

17. $s = -2t^3 + 15t^2 + 36t$; $t = 2$.

18. $s = 24t + 3t^2 - t^3$; $t = 3$.

19. $s = 2t^3 - 27t^2 + 120t$; $t = 3$.

20. $s = 120t - 3t^2 - 2t^3$; $t = 2$.

21. $s = 60t + 3t^2 - 2t^3$; $t = 3$.

22. $s = \dfrac{t^3 + 1}{t}$; $t = 2$.

23. $s = t \cdot \sin^2 t$; $t = 1$, $t = \dfrac{\pi}{4}$.

24. $s = e^{t^3 - 1}$; $t = 1$.

25. $s = \ln(1 + t^2)$; $t = 3$.

26. $s = 5^{t^2}$; $t = 2$.

27. $s = \sin t + \cos 2t$; $t = 1$.

28. $s = e^{-\frac{t}{10}} \cdot \sin 2t$; $t = 5$.

29. $s = 5e^{-t} \cdot \cos t$; $t = 1$.

30. $s = 2e^{-\frac{t}{2}} \sin 2t$; $t = 1$.

31. $s = 4e^{-\frac{t}{8}} \cdot \sin t$; $t = 2$.

32. $s=4e^{-\frac{t}{4}}\cdot\sin 2t$; $t=1$.

33. $s=2e^{-\frac{t}{5}}\cdot\sin t$; $t=4$.

34. $s=4e^{-\frac{t}{2}}\cdot\cos 3t$; $t=1$.

35. $s=5e^{-\frac{t}{4}}\cdot\cos\frac{\pi t}{2}$; $t=2$.

36. $s=6e^{-\frac{t}{10}}\cdot\cos\frac{\pi t}{4}$; $t=5$.

37. $s=2e^{-\frac{t}{4}}\cdot\sin\frac{\pi}{2(t+1)}$; $t=2$.

38. $s=10e^{-\frac{t}{2}}\cdot\cos\frac{\pi}{3(t+2)}$; $t=3$.

39. $s=6e^{-\frac{t}{5}}\cdot\sin\frac{\pi}{4(t-1)}$; $t=3$.

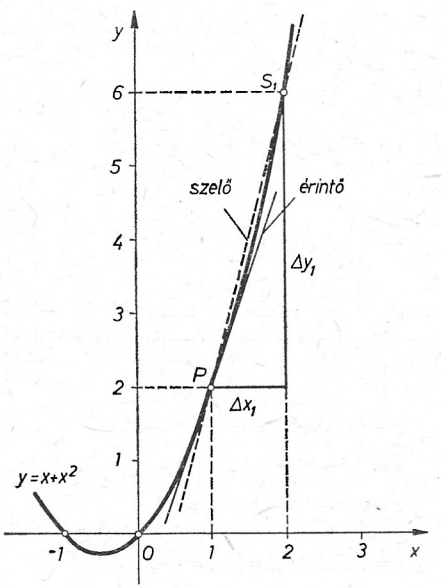
f) Geometriai példák és feladatok

1. Határozzuk meg az $y=x+x^2$ egyenlettel jellemzett görbe érintőjének iránytangensét az $x=1$ helyen, azaz az $x=1$ abszcisszájú pontjában. (L. 9. ábra.)

A görbén S_1, S_2, ... segédpontokat veszünk fel. Ezek abszcisszái legyenek rendre 2, 1,5, 1,1, 1,01, 0, 0,9, 0,99.

A megfelelő ordinátákat behelyettesítéssel kapjuk:

	P	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
x	1	2	1,5	1,1	1,01	0	0,9	0,99
y	2	6	3,75	2,31	2,0301	0	1,71	1,9701



9. ábra.

A P, S_1; P, S_2; ... pontokat összekötő szelők iránytangensei:

$$m_1=\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}=\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{6-2}{2-1}=4;$$

$$m_2=\frac{3{,}75-2}{1{,}5-1}=\frac{1{,}75}{0{,}5}=3{,}5;$$

$$m_3=\frac{2{,}31-2}{1{,}1-1}=\frac{0{,}31}{0{,}1}=3{,}1;$$

$$m_4=\frac{2{,}0301-2}{1{,}01-1}=\frac{0{,}0301}{0{,}01}=3{,}01;$$

$$m_5=\frac{0-2}{0-1}=2;$$

$$m_6=\frac{1{,}71-2}{0{,}9-1}=\frac{-0{,}29}{-0{,}1}=2{,}9;$$

$$m_7=\frac{1{,}9701-2}{0{,}99-1}=\frac{-0{,}299}{-0{,}01}=2{,}99.$$

Ha ezeket az iránytangens értékeket nagyság szerinti sorrendbe rendezzük, a következőt kapjuk:

$$m_1>m_2>m_3>m_4>3,$$

$$m_5<m_6<m_7<3.$$

Kérdés, hogy a 3 értékhez minden határon túl közeledik-e mind az alsó, mind a felső sorozat? Évégből nézzük meg általánosan, mi lesz a szelő iránytangense, ha S segédpont abszcisszája $1+\Delta x$ (ahol Δx tetszés szerinti pozitív vagy negatív, 0-tól különböző kicsiny szám):

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{[(1+\Delta x)+(1+\Delta x)^2]-2}{\Delta x}=\frac{3\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=3+\Delta x.$$

Ha mármost $S\to P$, $\Delta x\to 0$,

akkor $$m\to 3.$$

Tehát az $x=1$ helyen a görbe érintőjének iránytangense — mint már előre sejthető volt: $m=3$.

Az *érintőegyenes egyenlete:*

$$y=3(x-1)+2.$$

Az érintőt pl. így szerkeszthetjük meg (l. 10. ábra):

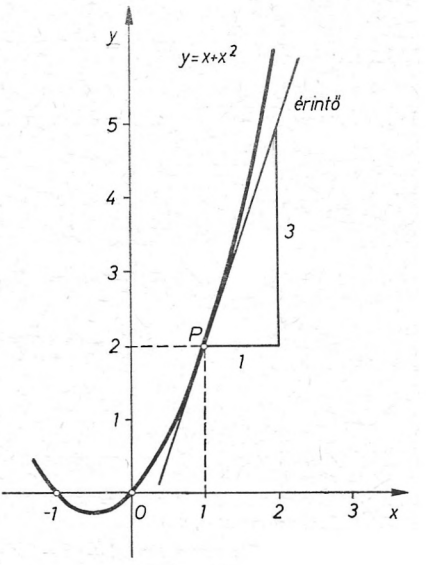
A P ponthoz derékszögű háromszöget illesztünk úgy, hogy vízszintes befogója 1 egység legyen, s azt a P ponttól a pozitív x-tengely irányába mérjük, és függőleges, y-tengellyel párhuzamos befogója annyi egység, amekkora az érintő iránytangense (előjelhelyesen!). A derékszögű háromszög átfogója az érintőegyenesnek egy szakasza.

Az érintő meredekségét (iránytangensét) általánosan is meghatározhatjuk a P $(x, x+x^2)$ pontban.

Az S segédpont koordinátái:

$(x+\Delta x)$ és $[(x+\Delta x)+(x+\Delta x)^2]$.

A szelő iránytangense:



10. ábra.

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{[(x+\Delta x)+(x+\Delta x)^2]-(x+x^2)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{\Delta x+2x\,\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=1+2x+\Delta x.$$

Ha $S\to P$, vagyis $\Delta x\to 0$, akkor a szelő átmegy érintőbe és iránytangense

$$m\to 1+2x.$$

Előbbi eredményünk ebben természetesen bennfoglaltatik. Ha $x=1$, akkor az érintő iránytangense:

$$m=1+2\cdot 1=3.$$

*

Határozzuk meg az alábbi függvények esetén a megfelelő görbék adott pontjához tartozó érintő meredekségét, írjuk fel az érintőegyenes egyenletét, és szerkesszük meg az érintőt:

2. $y=\frac{1}{x}$ az $x=2$ helyen. **3.** $y=\sqrt{x}$ az $x=4$ helyen.

4. $y=\frac{1}{x^2}$ az $x=3$ helyen. **5.** $y=x^2+3$ az $x=\frac{1}{2}$ helyen.

6. $y=\sqrt{x-1}$ az $x=2$ helyen. **7.** $y=(3x+1)^2$ az $x=1$ helyen.

8. $y=2x^3$ az $x=1$ helyen. **9.** $y=2x-3x^4$ az $x=1{,}2$ helyen.

10. $y=5x^2-3$ az $x=2$ helyen. **11.** $y=\frac{2}{4x-3}$ az $x=1{,}5$ helyen.

12. $y=\frac{1}{3x^2}$ az $x=1$ helyen. **13.** $y=\frac{x+1}{x-1}$ az $x=3$ helyen.

14. $y=\sqrt{x^2-1}$ az $x=2$ helyen. **15.** $y=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ az $x=3$ helyen.

16. $y=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ az $x=2$ helyen. **17.** $y=5-\frac{2}{x^2}$ az $x=1$ helyen.

18. $y=x+\frac{1}{x}$ az $x=4$ helyen. **19.** $y=x+\sqrt{2x-1}$ az $x=13$ helyen.

20. $y=\frac{x^2-2x+1}{x+3}$ az $x=1$ helyen.

*

Az alább következő feladatok megoldását *halasszuk későbbre*, amikor már a differenciálási szabályokat kellően begyakoroltuk.

21. Keressük meg az $y=\sin x$ görbe érintőjének iránytangensét az $x=0$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, π helyeken.

22. Keressük meg az $x^2+y^2-6x-4y+12=0$ egyenletű görbe vízszintes és függőleges érintőjű helyeit.

23. Melyek az $x^2+y^2=25$ kör azon pontjai, melyekben a körön mozgó pont éppen a $3x-4y+7=0$ egyenessel párhuzamosan halad?

24. Az $y=x^3-12x+4$ görbe mely pontjaiban lesz az érintő iránytangense 15?

25. Hol van a $6y=2x^3-15x^2+42x-30$ görbének 45° hajlású érintője? Hol lesz az érintő meredeksége 3?

26. Keressük meg az $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$ görbe azon pontjait, ahol

a) az érintő hajlásszöge $\frac{3\pi}{4}$;

b) az érintő az x-tengellyel párhuzamos.

27. Két pont pályagörbéjének egyenlete $y=2x^2-8x+1$ és $2y=x^2+8x-5$. Van-e olyan x hely, melyhez tartozó görbepontokban a két pont mozgásiránya párhuzamos?

28. Keressük meg az $xy=16$ görbe azon pontjának koordinátáit, melyben a normális (az érintőre merőleges egyenes) átmegy az origón.

29. Határozzuk meg az $y=x^3-6x^2+11x-6$ görbe 0-helyein az érintő meredekségét.

30. Keressük meg a $6y=2x^3-3x^2-42x+60$ görbe azon pontjait,
a) ahol az érintő irányszöge 135°;
b) ahol az érintő meredeksége 5.

31. Az $y=\frac{x}{1-x^2}$ görbe mely pontjaiban van az érintőnek 45°-os irányszöge?

32. Az $y=x^3+1$ görbe mely pontjaiban lesz az érintő
a) párhuzamos az $y=3x-1$ egyenessel;
b) merőleges az $x+12y-5=0$ egyenesre?

33. Az $y=\frac{6(x-6)}{x^2-2x-8}$ görbén hol lesz az x-tengellyel párhuzamos az érintő?

34. A $2y=2x^3-x^2+1$ görbe mely pontjaiban lesz az érintő
a) párhuzamos az $y=10x-5$ egyenessel;
b) merőleges az $x+2y+3=0$ egyenesre?

35. Keressük meg az $x^2+y^2+4x-6y=3$ kör azon pontjait, melyekben az érintő párhuzamos az x-, illetve az y-tengellyel.

36. A $4y^2-4xy+2x^2-2x=8$ ellipszis mely pontjaiban lesz az érintő párhuzamos az $x-2y+4=0$ egyenessel?

37. Keressük meg az $y^2-2xy+2x^2-2y-7=0$ ellipszis azon pontjait, ahol az érintő 45° hajlásszögű.

38. Keressük meg az $y=\sin x+\cos x$ görbe azon pontjait, ahol az érintő
a) párhuzamos az x-tengellyel;
b) 45° hajlásszögű.

39. Mekkora az $y=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+1$ görbe érintőjének meredeksége az $x=0$; 1; 2 helyeken? Mely pontokban lesz az érintő meredeksége 2?

40. Hol lesz az $x^4-8xy^2+y^4=0$ görbén az érintő az y-tengellyel párhuzamos?

41. Két pont pályagörbéjének egyenlete $y=x^2+x-6$ és $2y=x^2-2x+8$. Mely x-helyekhez tartozó görbepontokban lesz a két pont mozgásiránya
a) párhuzamos;
b) merőleges?

42. Mekkora az $y=\frac{4x}{x^2+4}$ görbe érintőjének a meredeksége
a) az origóban;
b) a (2, 1) pontban?

43. Hol lesz az $y=5\cdot\sin^2 x+2\cdot\cos 4x$ görbe érintőjének meredeksége zérus?

44. Hol lesz az $y=2\cdot\sin x+3\cdot\cos 2x$ görbe érintőjének meredeksége 0?

45. Keressük meg az $y=2\cdot\sin^2 x$ görbén azokat a pontokat, ahol az érintő hajlásszöge $\frac{\pi}{3}$.

46. Hol lesz az $y=\sin 3x-3\cdot\sin x$ görbe érintőjének meredeksége 0?

47. Hol lesz az $y=2\cdot\sin^2 x+3\cdot\cos 2x$ görbe érintőjének meredeksége 0?

48. Hol lesz az $x^3+xy^2+4y^2-4x^2=0$ görbe érintője párhuzamos az y-tengellyel?

49. Mekkora szög alatt metszi az $y^3=x^2-7x$ görbe az $y=2$ egyenest?

50. Mekkora szög alatt metszi az x-tengelyt a $4y=x^3-4x$ görbe?

51. Az $y^2=\frac{x^3}{4-x}$ cisszoid mely pontjában lesz az érintő meredeksége 2?

52. Az $y^2=x^2\cdot(4-x)$ görbe mely pontjaiban lesz az érintő párhuzamos az $x+2y+5=0$ egyenessel?

53. Az $xy^2=16$ görbe mely pontjához tartozó normális megy át az origón?

54. A $4y = 4C \cdot e^{-2x} + 2x^2 - 2x + 1$ egyenlet egy görbesereget határoz meg. Minden C értékhez tartozik egy görbe. Keressük meg azon pontok geometriai helyét, melyekben a görbesereg egyes görbéinek érintői az x-tengellyel párhuzamosak.

Útmutatás. A görbesereg egyenletéből és az $y' = 0$ egyenletből C értékét kiküszöbölve kapjuk a keresett görbe egyenletét.

55. A $2y = 2k \cdot e^x + \sin x + \cos x - 2$ egyenlet egy görbesereget határoz meg. Minden k értékhez tartozik egy görbe. Keressük meg azon pontok geometriai helyét, melyekben a görbesereg egyes görbéinek érintői 45° hajlásszögűek.

Az alábbi feladatokban *két adott görbe metszési szögét* kell meghatároznunk.

56. $y = 2 - x^2$; $y = x^2$.

Először megkeressük a két görbe metszéspontjainak koordinátáit:

A metszéspontokban az ordináták egyenlők, tehát

$$2 - x^2 = x^2,$$

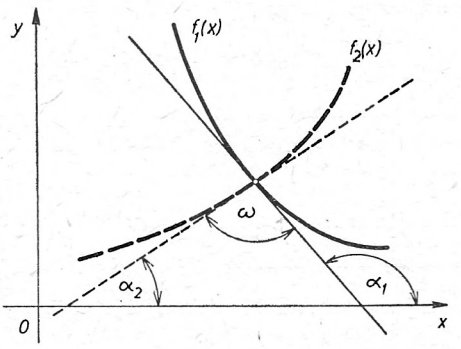
$$x^2 = 1,$$

$$x = \pm 1.$$

Ennek megfelel: $y = 1$.

A két metszéspont: $P_1(1,1)$ és $P_2(-1,1)$.

Kiszámítjuk a két görbe érintőinek iránytangensét a két metszéspontban:



11. ábra.

Mivel $y = 2 - x^2$ esetén $y' = -2x$

és $y = x^2$ esetén $y' = 2x$,

mindkét metszéspontban az egyik iránytangens $m_1 = -2$, a másik pedig $m_2 = 2$.

Ezekkel ki tudjuk számítani a két érintő hajlásszögének tangensét. Ugyanis az ábra szerint (l. 11. ábra)

$$\alpha_1 = \omega + \alpha_2,$$

azaz $\omega = \alpha_1 - \alpha_2$.

Mivel $m_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ és $m_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$,

azért

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} (\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

A mi esetünkben tehát:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{-2 - 2}{1 - 2 \cdot 2} = \frac{4}{3}.$$

Innen pedig

$$\omega = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \approx 53{,}2°.$$

57. $y = 5 - x^2$; $y = 5 + 3x$.

58. $y = 3x - 5$; $y = x^2 - 5$.

59. $y = x^2 - 2x + 1$; $y = 7 + 2x - x^2$.

60. $y = x^2 - 4$; $y = 4 - x^2$.

61. $y = x^3 - 2x^2$; $y = 2x - x^2$.

62. $y = x^2 + 2x + 1$; $y = 9 + 2x - x^2$.

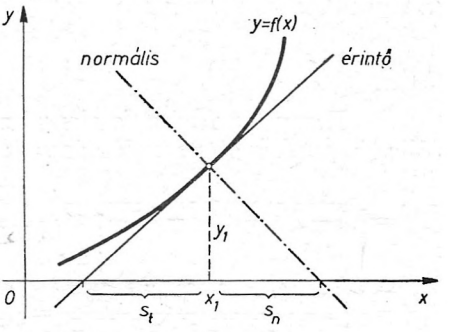
63. $y = \dfrac{1}{1+x}$; $y = \dfrac{1}{1-x}$.

64. $y = \dfrac{2}{x-1}$; $y = \dfrac{x^3}{4}$. [Metszéspont: $P(2,2)$.]

65. $y = \dfrac{x}{x-1}$; $y = \dfrac{x^2}{2}$. [Metszéspont: $P(2,2)$.]

*

Az érintő iránytangensének kiszámítása lehetővé teszi az érintőegyenes és a rá merőleges egyenes, a normális egyenletének felírásán, valamint két görbe metszési szögének kiszámításán kívül a *szubtangens és szubnormális hosszának meghatározását.* (Lásd 12. ábra.)



12. ábra.

A szubtangens az x-tengelynek az a szakasza, mely az érintőegyenes 0-helye és az érintési pont abszcisszája között fekszik.

A szubnormális az x-tengelynek az a szakasza, mely a normális 0-helye és a görbével való metszéspont abszcisszája között fekszik.

Ha a görbe (x_1, y_1) pontjában a derivált értékét, azaz az érintő iránytangensét m-mel jelöljük,

az érintőegyenes egyenlete: $y - y_1 = m(x - x_1)$;

a normális egyenlete: $y - y_1 = -\dfrac{1}{m}(x - x_1)$;

a szubtangens hossza: $s_t = \left|\dfrac{y_1}{m}\right|$;

a szubnormális hossza: $s_n = |y_1 m|$.

Az alábbi feladatokban határozzuk meg a két görbe metszési szögét, írjuk fel az érintők és normálisok egyenletét és számítsuk ki a szubtangensek, szubnormálisok hosszát:

66. $2y = x^2$; $4y = x^2 + 4$.

67. $4y = x^2 + 4$; $x^2 = 8 - 2y$.

68. $2y = x^2$; $x^2 - 4x + 2y = 0$.

69. $x^2 - 2x = 2y - 1$; $x^2 - 6x + 2y + 5 = 0$.

70. $y=x^2-2x-3$; $y=3x-x^2$.

71. $y=x^2-3x$; $9y=2x^2-4x+20$. ($x=4$ helyen.)

72. $4y=2x^2-3x$; $4y=x^2+4$.

73. $x^2=4y$; $2y^2=x$.

74. $x^2=8y^3$; $4y=9x-x^2$.

75. $2y^2=x^3$; $y^2=32x$.

76. $y^2=16x$; $y=x^2-2x$.

77. $y^2=8-4x^3$; $y^2=4x^3$.

78. $8y=x^3$; $4y=4x-x^2$.

79. $y^2=x^3-4$; $x^2+y^2-6x+4=0$.

80. $x^2+y^2+2x-24=0$; $4x^2+y^2+8x-48=0$.

81. $x^2=16y$; $y^2-6y=x$.

82. $xy=12$; $x^2+y^2=25$.

83. $y^2=x^3$; $7x-3y-4=0$.

84. $10x^2+y^2-34=0$; $3y-2x^2=0$.

85. $y^2-4y-x=0$; $x+y^2-6=0$.

g) **Függvényérték-változás főrész és elenyésző rész összegeként**

1. A független változó x értékét Δx-szel megnövelve, határozzuk meg az $y=\sqrt{5-2x^2}$ függvény értékének megváltozását mint a főrész és elenyésző rész összegét.

Eredeti függvényérték: $y=\sqrt{5-2x^2}$,

megváltozott függvényérték: $y+\Delta y=\sqrt{5-2(x+\Delta x)^2}$,

függvényérték megváltozása: $\Delta y=\sqrt{5-2(x+\Delta x)^2}-\sqrt{5-2x^2}$.

Hogy ezt főrész és elenyésző rész összegeként felírhassuk, előbb meg kell állapítanunk a differenciálhányadost:

$$\Delta y=\sqrt{5-2(x+\Delta x)^2}-\sqrt{5-2x^2}\cdot\frac{\sqrt{5-2(x+\Delta x)^2}+\sqrt{5-2x^2}}{\sqrt{5-2(x+\Delta x)^2}+\sqrt{5-2x^2}}=$$

$$=\frac{5-2(x+\Delta x)^2-5+2x^2}{\sqrt{5-2(x+\Delta x)^2}+\sqrt{5-2x^2}}=\frac{-4x\cdot\Delta x-2\Delta x^2}{\sqrt{5-2(x+\Delta x)^2}+\sqrt{5-2x^2}};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-4x-2\Delta x}{\sqrt{5-2(x+\Delta x)^2}+\sqrt{5-2x^2}}\to\frac{-2x}{\sqrt{5-2x^2}},\text{ ha }\Delta x\to 0.$$

Tehát

$$f'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{5-2x^2}}.$$

A differenciahányados és differenciálhányados közti eltérés:

$$\varepsilon=\frac{-4x-2\Delta x}{\sqrt{5-2(x+\Delta x)^2}+\sqrt{5-2x^2}}+\frac{2x}{\sqrt{5-2x^2}};$$

Ezekkel a $\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\varepsilon\cdot\Delta x$

kifejezés a következő alakot ölti:

$$\Delta y=\underbrace{\frac{-2x}{\sqrt{5-2x^2}}\cdot\Delta x}_{\text{főrész}}+\underbrace{\left(\frac{2x}{\sqrt{5-2x^2}}-\frac{4x+2\Delta x}{\sqrt{5-2(x+\Delta x)^2}+\sqrt{5-2x^2}}\right)\cdot\Delta x}_{\text{elenyésző rész}}.$$

2. Írjuk fel ugyanezt az $y=\frac{3x}{2-x}$ függvénynél.

Eredeti függvényérték: $y=\frac{3x}{2-x}$,

megváltozott függvényérték: $y+\Delta y=\frac{3(x+\Delta x)}{2-(x+\Delta x)}$,

függvényérték megváltozása: $\Delta y=\frac{3(x+\Delta x)}{2-(x+\Delta x)}-\frac{3x}{2-x}$.

$$\Delta y=\frac{3(x+\Delta x)(2-x)-3x[2-(x+\Delta x)]}{[2-(x+\Delta x)](2-x)}=\frac{6\Delta x}{[2-(x+\Delta x)](2-x)};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{6}{[2-(x+\Delta x)](2-x)}\to\frac{6}{(2-x)^2},\ \text{ha}\ \Delta x\to 0.$$

$$f'(x)=\frac{6}{(2-x)^2};\qquad \varepsilon=\frac{6}{[2-(x+\Delta x)](2-x)}-\frac{6}{(2-x)^2}.$$

Így végeredményben:

$$\Delta y=\underbrace{\frac{6}{(2-x)^2}\cdot\Delta x}_{\text{főrész}}+\underbrace{\left(\frac{6}{[2-(x+\Delta x)](2-x)}-\frac{6}{(2-x)^2}\right)\cdot\Delta x}_{\text{elenyésző rész}}.$$

3. Írjuk fel ugyanezt az $y=5x-2x^2$ függvénynél.

Eredeti függvényérték: $y=5x-2x^2$,

megváltozott függvényérték: $y+\Delta y=5(x+\Delta x)-2(x+\Delta x)^2$,

függvényérték megváltozása: $\Delta y=5(x+\Delta x)-2(x+\Delta x)^2-5x+2x^2$.

A műveleteket elvégezve:

$$\Delta y=5\Delta x-4x\Delta x-2\Delta x^2=\underbrace{(5-4x)\Delta x}_{\text{főrész}}+\underbrace{(-2\Delta x)\cdot\Delta x}_{\text{elenyésző rész}}.$$

*

Írjuk fel az alábbi függvények értékének megváltozását, mint a főrész és elenyésző rész összegét:

4. $y=3x+7$.
5. $y=2x-3$.
6. $x=t^2+2$.
7. $y=2t^2-3$.
8. $y=2t^3+1$.
9. $y=2t^2-t$.

10. $s=3t^2+2t$.
11. $y=x^2+7x$.
12. $y=2x^3-4x$.
13. $y=2t-t^3$.
14. $y=2t^2-t^3$.
15. $y=t^3-5t$.
16. $y=\frac{1}{x}$.
17. $s=\frac{1}{3t}$.
18. $y=\frac{1}{x^2}$.
19. $y=\frac{3}{x+1}$.
20. $y=\frac{2}{1-t}$.
21. $y=\frac{3}{2x-1}$.
22. $y=\frac{3}{x^2-1}$.
23. $x=\frac{5}{2t+1}$.
24. $y=\frac{4}{3-2x}$.
25. $y=\frac{3}{5-4x}$.
26. $y=\frac{2}{1-t^2}$.
27. $s=\frac{3}{1+t^2}$.
28. $y=\frac{5-2x}{3-x}$.
29. $y=\frac{2x+1}{x^2}$.
30. $y=\frac{x^2}{2x+1}$.
31. $y=\frac{x^2}{1-3x}$.
32. $s=\frac{5t^2+1}{2t}$.
33. $x=\frac{2y^2}{1+2y}$.
34. $y=\sqrt{x+1}$.
35. $y=\sqrt{3x+2}$.

3. §. A DIFFERENCIÁLHÁNYADOS KISZÁMÍTÁSA, DIFFERENCIÁLÁSI SZABÁLYOK

a) **Elemi függvények differenciálhányadosa**

α) $y=c=$ **állandó.** A függvényérték nem függ x-től, tehát bármely Δx független változó értékváltozáshoz $\Delta y=0$ függvényérték-változás tartozik.

Így a differenciahányados

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$

és nyilván ennek határértéke is

$$\frac{dy}{dx}=0. \qquad \boxed{(c)'=0.}$$

β) **Állandóval szorzott függvény:** $y=c\cdot f(x)$.

Eredeti függvényérték: $y=c\cdot f(x)$,

megváltozott függvényérték: $y+\Delta y=c\cdot f(x+\Delta x)$,

függvényérték megváltozása: $\Delta y=c\cdot f(x+\Delta x)-c\cdot f(x)$;

Vagy a közös tényező kiemelésével:

$$\Delta y = c\cdot[f(x+\Delta x)-f(x)].$$

A differenciák hányadosa

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

A differenciálhányados:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = c\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = c\cdot f'(x).$$

$$\boxed{[c\cdot f(x)]' = c\cdot f'(x).}$$

b) Hatványfüggvények | *α)* $y=x^n$, **(n pozitív egész szám).**

Eredeti függvényérték: $y=x^n$,

megváltozott függvényérték: $y+\Delta y=(x+\Delta x)^n$,

függvényérték megváltozása: $\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n$.

A differenciák hányadosa:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{(x+\Delta x)-x}.$$

Felhasználjuk az alábbi ismert algebrai összefüggést:

$$\frac{a^n-b^n}{a-b} = a^{n-1}+a^{n-2}\cdot b+a^{n-3}\cdot b^2+\ldots+a^2\cdot b^{n-3}+a\cdot b^{n-2}+b^{n-1}.$$

(Megjegyzendő, hogy a jobb oldalon összesen n tag van: $n-1$ tagban szerepel az a és van még egy tag!)

Ennek mintjára:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}\cdot x+(x+\Delta x)^{n-3}\cdot x^2+\ldots+$$

$$+(x+\Delta x)^2\cdot x^{n-3}+(x+\Delta x)\cdot x^{n-2}+x^{n-1}.$$

Ha $\Delta x\to 0$, akkor a jobb oldal mindegyik tagja x^{n-1}-hez tart, így a differenciálhányados:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = n\cdot x^{n-1}.$$

$$\boxed{(x^n)' = n\cdot x^{n-1}.}$$

(Megjegyzés: A levezetésben felhasznált algebrai összefüggés n pozitív egész szám értékére áll csak fenn, így ebből az következnék, hogy a differenciálhányadosképlet is csak n pozitív egész szám értékére áll fenn. Ámde más úton igazolható, és az alábbi számpéldák és egyéb példák is meggyőznek arról, hogy a képlet bármely pozitív, negatív egész- és törtkitevőre fennáll!)

β) Pozitív egészkitevős hatványfüggvények

1. $y=x.$

Eredeti függvényérték: $y=x,$

megváltozott függvényérték: $y+\Delta y=x+\Delta x,$

függvényérték megváltozása: $\Delta y=(x+\Delta x)-x=\Delta x.$

A differenciahányados:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

A differenciálhányados:

$$\frac{dy}{dx}=1.$$

$$\boxed{(x)'=1.}$$

Az általános képlet is természetesen erre az eredményre vezet:

$$y'=(x^1)'=1\cdot x^{1-1}=x^0=1.$$

2. $y=x^2.$

Eredeti függvényérték: $y=x^2,$

megváltozott függvényérték: $y+\Delta y=(x+\Delta x)^2,$

függvényérték megváltozása: $\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\,\Delta x-\Delta x^2.$

A differenciahányados: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x.$

A differenciálhányados: $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2x.$

$$\boxed{(x^2)'=2x.}$$

A képlet alapján: $y'=(x^2)'=2\cdot x^{2-1}=2x.$

*

Határozzuk meg az alábbi függvények differenciálhányadosát:

3. $y=x^3$. 4. $y=2x^4$. 5. $y=4x^7$.

6. $y=x^{23}$. 7. $y=x^{10}$. 8. $y=5x^8$.

9. $y=\frac{1}{4}x^4$. 10. $y=\frac{2}{15}x^5$. 11. $y=0{,}5x^6$.

12. $y=3{,}6x^{10}$. 13. $y=0{,}1x^3$. 14. $y=2x^{28}$.

15. $y=\frac{1}{8}x^{32}$.

γ) Negatív egészkitevős hatványfüggvények

1. $y=x^{-1}=\frac{1}{x}$.

Eredeti függvényérték: $y=\frac{1}{x}$,

megváltozott függvényérték: $y+\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}$,

függvényérték megváltozása: $\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{\Delta x}{(x+\Delta x)x}$.

A differenciahányados: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{(x+\Delta x)x}$.

A differenciálhányados: $\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x^2}$.

$$\boxed{(x^{-1})'=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.}$$

Az általános képlettel ugyanez az eredmény adódik:

$$y'=\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-1\cdot x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}.$$

2. $y=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$.

Eredeti függvényérték: $y=\frac{1}{x^2}$,

megváltozott függvényérték: $y+\Delta y=\frac{1}{(x+\Delta x)^2}$,

függvényérték megváltozása: $\Delta y=\frac{1}{(x+\Delta x)^2}-\frac{1}{x^2}$.

Vagy közös nevezőre hozva:

$$\Delta y = \frac{x^2 - (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2)}{(x+\Delta x)^2 \cdot x^2} = \frac{-2x\Delta x - \Delta x^2}{(x+\Delta x)^2 \cdot x^2}$$

A differenciahányados:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2x - \Delta x}{(x+\Delta x)^2 \cdot x^2} = -\frac{2}{(x+\Delta x)^2 \cdot x} - \frac{\Delta x}{(x+\Delta x)^2 \cdot x^2}.$$

A differenciálhányados:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2}{x^3}.$$

$$(x^{-2})' = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}.$$

Az általános képlettel:

$$y' = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2 \cdot x^{-2-1} = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

3. $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$

(n pozitív egész szám.)

Eredeti függvényérték: $y = \frac{1}{x^n},$

megváltozott függvényérték: $y + \Delta y = \frac{1}{(x+\Delta x)^n},$

függvényérték megváltozása: $\Delta y = \frac{1}{(x+\Delta x)^n} - \frac{1}{x^n}.$

Vagy közös nevezőre hozva: $\Delta y = \frac{x^n - (x+\Delta x)^n}{(x+\Delta x)^n \cdot x^n}.$

A differenciahányados:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{(x+\Delta x)^n \cdot x^n} \cdot \frac{x^n - (x+\Delta x)^n}{x - (x+\Delta x)}.$$

A differenciálhányados:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

Az általános képlettel ugyanez az eredmény adódik:

$$y'=\left(\frac{1}{x^n}\right)'=(x^{-n})'=-n\cdot x^{-n-1}=-\frac{n}{x^{n+1}}.$$

*

Határozzuk meg az alábbi függvények differenciálhányadosát:

4. $y=x^{-3}$. 5. $y=3x^{-4}$. 6. $y=-2x^{-6}$.

7. $y=x^{-11}$. 8. $y=x^{-31}$. 9. $y=\frac{1}{10}x^{-10}$.

10. $y=\frac{3}{x^6}$. 11. $y=\frac{2}{3x^5}$. 12. $y=-\frac{1}{6}x^{-9}$.

13. $y=-2x^{-3}$. 14. $y=\frac{1}{2x^4}$. 15. $y=\frac{24}{x^5}$.

c) Trigonometrikus függvények

α) $y=\sin x$

Eredeti függvényérték: $y=\sin x$,

megváltozott függvényérték: $y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$,

függvényérték megváltozása: $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$.

Felhasználjuk a

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

összefüggést. Ezzel

$$\Delta y=2\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

A differenciahányados:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos(x+h)\cdot\frac{\sin h}{h},$$

ha

$$\frac{\Delta x}{2}=h.$$

(Ha: $\Delta x\to 0$, akkor nyilván $h\to 0$ is.)

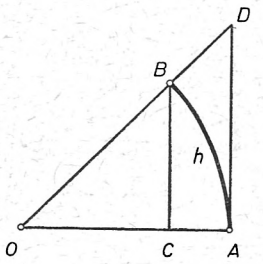
A differenciálhányados:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\cos(x+h)\cdot\frac{\sin h}{h}.$$

Az első tényező határértéke nyilván $\cos x$. $\frac{\sin h}{h}$ a h-nak páros függvénye. Ezért a továbbiakban elég csak a $h\geqq 0$ esetre szorítkozni.

A második tényező határértéke pl. így határozható meg:

$$\overset{\frown}{AB}=h.$$



13. ábra.

Az ábrából (lásd 13. ábra) nyilvánvaló, hogy minden $0 \leqq h < \frac{\pi}{2}$ ívre fennáll a területekre vonatkozó alábbi egyenlőtlenség:

$$COB\triangle \leqq AOB \text{ körcikk} \leqq AOD\triangle .$$

Az egyenlőségjel akkor áll fenn, ha $\overset{\frown}{AB}=h=0$. Ha a kör sugara: $\overline{OA}=\overline{OB}=1$, akkor

$$\sin h=\overline{BC};\ \cos h=\overline{OC};\ \operatorname{tg} h=\overline{AD},$$

így $2COB\triangle =\overline{CB}\cdot\overline{OC}=\sin h\cdot\cos h,$

$2AOB$ körcikk $=\overset{\frown}{AB}\cdot\overline{OA}=h,$

$$2AOD\triangle =\overline{OA}\cdot\overline{AD}=\operatorname{tg} h=\frac{\sin h}{\cos h}.$$

Ezekkel az egyenlőtlenség így alakul:

$$\sin h\cdot\cos h\leqq h\leqq\frac{\sin h}{\cos h}.$$

Mindegyik tagot $\sin h$-val osztva:

$$\cos h\leqq\frac{h}{\sin h}\leqq\frac{1}{\cos h},$$

vagy a reciprok értékekre:

$$\frac{1}{\cos h}\geqq\frac{\sin h}{h}\geqq\cos h,$$

azaz $\frac{\sin h}{h}$ értéke mindig $\cos h$ és $\frac{1}{\cos h}$ értéke között fekszik.

Mivel pedig

$$\lim_{h\to 0}\cos h=1 \text{ és } \lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos h}=1,$$

feltétlenül

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1.$$

Így a differenciálhányados:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\cos(x+h)\cdot\frac{\sin h}{h}=\cos x.$$

$$\boxed{(\sin x)'=\cos x.}$$

β) $y=\cos x$

Eredeti függvényérték: $y=\cos x,$

megváltozott függvényérték: $y+\Delta y=\cos(x+\Delta x),$

függvényérték megváltozása: $\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x.$

Felhasználjuk a

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

összefüggést. Ezzel

$$\Delta y=-2\cdot\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

A differenciahányados:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2\cdot\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=-\sin(x+h)\cdot\frac{\sin h}{h},$$

ha $\frac{\Delta x}{2}=h.$

A differenciálhányados pedig:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\sin x.$$

$$\boxed{(\cos x)'=-\sin x.}$$

** *γ)* $y=\operatorname{tg} x$

Eredeti függvényérték: $y=\operatorname{tg} x,$

megváltozott függvényérték: $y+\Delta y=\operatorname{tg}(x+\Delta x),$

függvényérték megváltozása: $\Delta y=\operatorname{tg}(x+\Delta x)-\operatorname{tg} x.$

Felhasználjuk a

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

összefüggést. Ezzel

$$\Delta y=\frac{\sin[(x+\Delta x)-x]}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}=\frac{1}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}\cdot\sin\Delta x.$$

A differenciahányados:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x},$$

A differenciálhányados:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x.$$

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x.}$$

Megjegyzés: A tg x differenciálhányadosára itt közölt levezetés a differenciálhányados definíciójára támaszkodik. *Figyelembe véve* azonban, *hogy* $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, *és ismerve a törtfüggvény differenciálási képletét,* tg x *differenciálhányadosa egyszerűbben adódik.* (Lásd később: 52. oldal.)

** δ) $y = \operatorname{ctg} x$

Eredeti függvényérték: $y = \operatorname{ctg} x$,

megváltozott függvényérték: $y + \Delta y = \operatorname{ctg}(x + \Delta x)$,

függvényérték megváltozása: $\Delta y = \operatorname{ctg}(x + \Delta x) - \operatorname{ctg} x$.

Felhasználjuk a

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

összefüggést. Ezzel

$$\Delta y = -\frac{\sin[(x+\Delta x)-x]}{\sin(x+\Delta x)\cdot\sin x} = -\frac{1}{\sin(x+\Delta x)\cdot\sin x}\cdot\sin\Delta x.$$

A differenciahányados:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{\sin(x+\Delta x)\cdot\sin x}\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}.$$

A differenciálhányados:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{\sin(x+\Delta x)\cdot\sin x}\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right) = -\frac{1}{\sin^2 x} =$$

$$= -(1+\operatorname{ctg}^2 x).$$

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\operatorname{ctg}^2 x).}$$

Megjegyzés: A ctg x differenciálhányadosára itt közölt levezetés a differenciálhányados definíciójára támaszkodik. *Figyelembe véve* azonban, *hogy* $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, *és ismerve a törtfüggvény differenciálási képletét,* ctg x *differenciálhányadosa egyszerűbben adódik.* (Lásd később: 52. oldal.)

d) Exponenciális függvények

α) $\quad y = a^x, \quad a > 0$

Eredeti függvényérték: $y = a^x$,

megváltozott függvényérték: $y + \Delta y = a^{x+\Delta x}$,

függvényérték megváltozása: $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$.

A differenciahányados:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

Ennek határértékét így számítjuk:

$$\lim_{\Delta x\to 0} a^{\Delta x} = 1, \text{ ezért } a^{\Delta x} = 1 + h, \text{ ahol } h\to 0, \text{ ha } \Delta x\to 0.$$

De akkor $\Delta x = {}^a\log(1+h) = \dfrac{\ln(1+h)}{\ln a}$

és
$$\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \frac{1+h-1}{\frac{\ln(1+h)}{\ln a}} = \ln a \cdot \frac{1}{\ln(1+h)^{\frac{1}{h}}}.$$

Határértékben:
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \ln a \cdot \frac{1}{\ln(1+h)^{\frac{1}{h}}} = \ln a.$$

Így a differenciálhányados:
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

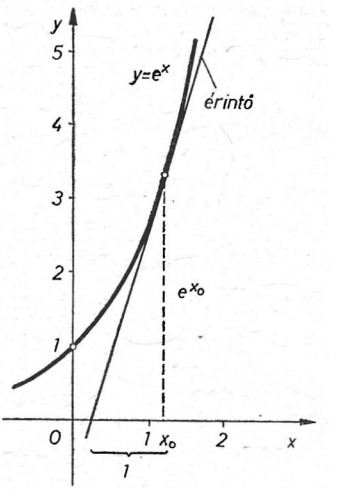
$$\boxed{(a^x)' = a^x \cdot \ln a.}$$

β) $y = e^x$. Ebben az esetben pontosan megismételhető az *α)* pontban közölt levezetés. Mivel $\ln e = 1$, azért

$$\boxed{(e^x)' = e^x.}$$

Megjegyzés: Érdemes külön kihangsúlyozni, hogy az exponenciális függvény az egyetlen függvény, melynek deriváltja bármely x helyen egyenes arányban áll magával a függvényértékkel. Az *e-alapú exponenciális függvény pedig az egyetlen függvény, melynek deriváltja bármely x helyen magával a függvényértékkel egyenlő.* (Ennek bizonyítását lásd a Differenciálegyenletek c. kötetben.)

Az exponenciális függvénynek ez a tulajdonsága módot nyújt arra, hogy egyszerűen tudjunk érintőt szerkeszteni az exponenciális függvény görbéjének bármely pontjában. (L. 14. ábra.)



14. ábra.

γ) Érintőszerkesztés

Szerkesszünk érintőt az alábbi, különböző alapú exponenciális függvények görbéihez, az adott x_0 helyen:

1. $y = 2^x$; $x_0 = 0$; $x_0 = 1$.
2. $y = 3^x$; $x_0 = 1$; $x_0 = -1$.
3. $y = 0{,}5^x$; $x_0 = -1$.
4. $y = \dfrac{1}{3^x}\left[= \left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right]$; $x_0 = 0$.
5. $y = e^x$; $x_0 = -1$; $x_0 = 0$; $x_0 = 1$.

6. Az exponenciális függvénynek fentebb említett tulajdonsága magyarázza, miért alkalmas épp az exponenciális függvény olyan természeti, fizikai folyamatok leírására, melyeknél az egyik változó mennyiségnek egy másikhoz viszonyított változási sebessége egyenesen arányos magával az első mennyiséggel. Ilyen pl. a szerves növekedés folyamata, a rádium bomlási folyamata stb.

$$y = Ce^{kx}.$$

e) **Hiperbolikus függvények**

** *α)* $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Eredeti függvényérték: $y = \operatorname{sh} x$,

megváltozott függvényérték: $y + \Delta y = \operatorname{sh}(x + \Delta x)$,

függvényérték megváltozása: $\Delta y = \operatorname{sh}(x + \Delta x) - \operatorname{sh} x$.

Felhasználjuk a

$$\operatorname{sh}\alpha - \operatorname{sh}\beta = 2\operatorname{ch}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

összefüggést. Ezzel

$$\Delta y = 2\cdot\operatorname{ch}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\operatorname{sh}\frac{\Delta x}{2}.$$

A differenciahányados:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cdot\operatorname{ch}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\operatorname{sh}\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \operatorname{ch}(x+h)\cdot\frac{\operatorname{sh} h}{h},$$

ha $\dfrac{\Delta x}{2} = h$.

(Ha $\Delta x \to 0$, akkor nyilván $h \to 0$ is.)

A differenciálhányados:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\operatorname{ch}(x+h)\cdot\frac{\operatorname{sh} h}{h}.$$

Az első tényező határértéke nyilván $\operatorname{ch} x$. $\dfrac{\operatorname{sh} h}{h}$ a h-nak páros függvénye. Ezért a továbbiakban elég a $h \geqq 0$ esetre szorítkozni.

A második tényező határértéke pl. így határozható meg:

Mivel úgyis $h \to 0$, azért elég a $0 \leqq h < +1$ intervallumra szorítkoznunk. Itt

$$1 + h \leqq e^h \leqq \frac{1}{1-h}$$

és

$$1 - h \leqq e^{-h} \leqq \frac{1}{1+h},$$

illetve

$$-\frac{1}{1+h} \leqq -e^{-h} \leqq -(1-h).$$

A kettőt összeadva:

$$\frac{1+2h+h^2-1}{1+h} \leqq e^h - e^{-h} \leqq \frac{1-1+2h-h^2}{1-h}.$$

vagy

$$\frac{2h+h^2}{1+h} \leqq e^h - e^{-h} \leqq \frac{2h-h^2}{1+h}.$$

A bal oldalt nyilván csökkentjük a $+h^2$ elhagyásával, a jobb oldalt pedig bizonnyal növeljük $-h^2$ elhagyásával. Tehát fennáll:

$$\frac{2h}{1+h} \leqq e^h - e^{-h} \leqq \frac{2h}{1-h}.$$

Vagy 2 h-val végigosztva

$$\frac{1}{1+h} \leqq \frac{\operatorname{sh} h}{h} \leqq \frac{1}{1-h},$$

azaz $\dfrac{\operatorname{sh} h}{h}$ értéke kis h-érték esetén mindig $\dfrac{1}{1+h}$ és $\dfrac{1}{1-h}$ értéke között fekszik. Mivel pedig

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{1+h} = 1$$

és

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{1-h} = 1,$$

feltétlenül

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sh} h}{h} = 1.$$

Így a differenciálhányados:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \operatorname{ch}(x+h) \cdot \frac{\operatorname{sh} h}{h} = \operatorname{ch} x.$$

$$\boxed{(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.}$$

Megjegyzés: A sh x differenciálhányadosára itt közölt levezetés a differenciálhányados definíciójára támaszkodik. *Figyelembe véve* azonban, *hogy* $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, *és ismerve az összeg és összetett függvény differenciálási szabályát,* sh x *differenciálhányadosa egyszerűbben adódik.* (L. később: 52. old.)

** $\beta)$ $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Eredeti függvényérték: $y = \operatorname{ch} x$,

megváltozott függvényérték: $y + \Delta y = \operatorname{ch}(x + \Delta x)$,

függvényérték megváltozása: $\Delta y = \operatorname{ch}(x+\Delta x) - \operatorname{ch} x$.

Felhasználjuk a

$$\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}\beta = 2 \operatorname{sh}\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \operatorname{sh}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

összefüggést. Ezzel

$$\Delta y = 2 \operatorname{sh}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \operatorname{sh}\frac{\Delta x}{2}.$$

A differenciahányados:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \operatorname{sh}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \operatorname{sh}\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \operatorname{sh}(x+h) \cdot \frac{\operatorname{sh} h}{h}.$$

A differenciálhányados pedig:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \operatorname{sh}(x+h) \cdot \frac{\operatorname{sh} h}{h} = \operatorname{sh} x.$$

$$\boxed{(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.}$$

Megjegyzés: A ch x differenciálhányadosára itt közölt levezetés a differenciálhányados definíciójára támaszkodik. *Figyelembe véve* azonban, *hogy* $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, *és ismerve az összeg és összetett függvény differenciálási szabályát,* ch x *differenciálhányadosa egyszerűbben adódik.* (L. később: 52. old.)

** γ) $y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Eredeti függvényérték: $y = \operatorname{th} x$,

megváltozott függvényérték: $y + \Delta y = \operatorname{th}(x + \Delta x)$,

függvényérték megváltozása: $\Delta y = \operatorname{th}(x + \Delta x) - \operatorname{th} x$.

Felhasználjuk a

$$\operatorname{th}\alpha - \operatorname{th}\beta = \frac{\operatorname{sh}(\alpha - \beta)}{\operatorname{ch}\alpha \cdot \operatorname{ch}\beta}$$

összefüggést. Ezzel

$$\Delta y = \frac{\operatorname{sh}[(x + \Delta x) - x]}{\operatorname{ch}(x + \Delta x) \cdot \operatorname{ch} x} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x + \Delta x) \cdot \operatorname{ch} x} \cdot \operatorname{sh} \Delta x.$$

A differenciahányados:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x + \Delta x) \cdot \operatorname{ch} x} \cdot \frac{\operatorname{sh} \Delta x}{\Delta x}.$$

A differenciálhányados:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\operatorname{ch}(x + \Delta x) \cdot \operatorname{ch} x} \cdot \frac{\operatorname{sh} \Delta x}{\Delta x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x;$$

$$\boxed{(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x.}$$

Megjegyzés: A th x differenciálhányadosára itt közölt levezetés a differenciálhányados definíciójára támaszkodik. *Figyelembe véve* azonban, *hogy* $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, *és ismerve a törtfüggvény differenciálási szabályát,* th x *differenciálhányadosa egyszerűbben adódik.* (L. később: 52. old.)

** δ) $y = \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

Eredeti függvényérték: $y = \operatorname{cth} x$,

megváltozott függvényérték: $y + \Delta y = \operatorname{cth}(x + \Delta x)$,

függvényérték megváltozása: $\Delta y = \operatorname{cth}(x + \Delta x) - \operatorname{cth} x$.

Felhasználjuk a

$$\operatorname{cth}\alpha - \operatorname{cth}\beta = -\frac{\operatorname{sh}(\alpha - \beta)}{\operatorname{sh}\alpha \cdot \operatorname{sh}\beta}$$

összefüggést. Ezzel

$$\Delta y = -\frac{\operatorname{sh}[(x + \Delta x) - x]}{\operatorname{sh}(x + \Delta x) \cdot \operatorname{sh} x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}(x + \Delta x) \cdot \operatorname{sh} x} \cdot \operatorname{sh} \Delta x.$$

A differenciahányados:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{\operatorname{sh}(x+\Delta x)\cdot\operatorname{sh} x}\cdot\frac{\operatorname{sh}\Delta x}{\Delta x}.$$

A differenciálhányados:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-\frac{1}{\operatorname{sh}(x+\Delta x)\cdot\operatorname{sh} x}\cdot\frac{\operatorname{sh}\Delta x}{\Delta x}\right]=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}=1-\operatorname{cth}^2 x.$$

$$\boxed{(\operatorname{cth} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}=1-\operatorname{cth}^2 x.}$$

Megjegyzés: A cth x differenciálhányadosára itt közölt levezetés a differenciálhányados definíciójára támaszkodik. *Figyelembe véve* azonban, *hogy* $\operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ *és ismerve a törtfüggvény differenciálási szabályát,* cth x *differenciálhányadosa egyszerűbben adódik.* (L. később 52. old.)

f) Logaritmusfüggvények

α) $y=\ln x$

Eredeti függvényérték: $y=\ln x,$

megváltozott függvényérték: $y+\Delta y=\ln(x+\Delta x),$

függvényérték megváltozása: $\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$

A differenciahányados:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}.$$

A differenciálhányados:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}.$$

$$\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}.}$$

β) $y={}^a\log x$

Ismerve azt, hogy ${}^a\log x=\frac{\ln x}{\ln a}$, és az állandóval szorzott függvény differenciálási szabályát:

$$\boxed{({}^a\log x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}.}$$

g) Összegfüggvény differenciálhányadosa $y=u(x)\pm v(x)$.

Eredeti függvényérték: $y=u(x)\pm v(x)$,

megváltozott függvényérték: $y+\Delta y=u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)$,

függvényérték megváltozása: $\Delta y=[u(x+\Delta x)-u(x)]\pm[v(x+\Delta x)-v(x)]$.

A differenciahányados:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\frac{v(x'+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}.$$

A differenciálhányados:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}=$$

$$=u'(x)\pm v'(x).$$

Tehát összeg- (különbség-) függvény tagonként differenciálható:

$$\boxed{(u\pm v)'=u'\pm v'.}$$

h) Szorzatfüggvény differenciálhányadosa $y=u(x)\cdot v(x)$.

Eredeti függvényérték: $y=u(x)\cdot v(x)$,

megváltozott függvényérték: $y+\Delta y=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)$,

függvényérték megváltozása: $\Delta y=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)$.

Illetve:

$\Delta y=u(x+\Delta x)\,[v(x+\Delta x)-v(x)]+v(x)\,[u(x+\Delta x)-u(x)]$.

A differenciahányados:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=u(x+\Delta x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}+v(x)\cdot\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}.$$

A differenciálhányados:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=u(x)\cdot v'(x)+v(x)\cdot u'(x).$$

$$\boxed{(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u.}$$

i) **Hányados-, törtfüggvény differenciálhányadosa**

$$y=\frac{u(x)}{v(x)}.$$

Eredeti függvényérték: $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$,

megváltozott függvényérték: $y+\Delta y=\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}$,

függvényérték megváltozása: $\Delta y=\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}$.

Illetve:

$$\Delta y=\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}=$$

$$=\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]\cdot v(x)-[v(x+\Delta x)-v(x)]\cdot u(x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}.$$

A differenciahányados:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x)-\dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\cdot u(x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}.$$

A differenciálhányados:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u'(x)\cdot v(x)-v'(x)\cdot u(x)}{v^2(x)}.$$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}.}$$

j) **Inverz függvény differenciálhányadosa**

Legyen $y=f(x)$ függvény inverze $x=g(y)$ és mindkettő differenciálható. Akkor $\Delta x\to 0$ esetén $\Delta y\to 0$ is.

Ismerve az $x=g(y)$ függvénynek $\dfrac{dx}{dy}\neq 0$ differenciálhányadosát, az $y=f(x)$ függvény $\dfrac{dy}{dx}$ differenciálhányadosa ezzel kifejezhető:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}.$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}},\ \text{ha}\ \frac{dx}{dy}\neq 0.}$$

k) Törtkitevős hatványfüggvény differenciálása

Az inverz függvény differenciálási szabályának segítségével igazolható, hogy a hatványfüggvény differenciálási szabálya, melyet eddig csak pozitív és negatív egész szám kitevőre igazoltunk, érvényes törtkitevők esetére is.

Legyen n pozitív egész szám mellett $y=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$.

Ekkor $x=y^n$; $\frac{dx}{dy}=n\cdot y^{n-1}=n\cdot x^{\frac{n-1}{n}}$.

Így $y'=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{n\cdot x^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}$.

$$\boxed{(\sqrt[n]{x})'=(x^{\frac{1}{n}})'=\frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}.}$$

*

Határozzuk meg az alábbi függvények differenciálhányadosát:

1. $y=\sqrt{x}$.
2. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$.
3. $y=x^{\frac{1}{3}}$.
4. $y=x^{-\frac{1}{3}}$.
5. $y=3x^{-\frac{1}{4}}$.
6. $y=2x^{\frac{1}{6}}$.
7. $y=\sqrt[15]{x}$.
8. $y=-\frac{1}{6}x^{\frac{1}{9}}$.
9. $y=-2x^{\frac{1}{4}}$.

l) Gyakorló feladatok az előző szabályok alkalmazására

α) Polinomok

1. $y=x^2-2x+3$.
2. $y=2x^2+x+1$.
3. $y=3x-x^2$.
4. $y=2x^3-7x+4$.
5. $y=7-x-2x^2$.
6. $y=2x^3+5x^2-2$.
7. $y=3x^2-2x+1$.
8. $y=\frac{1}{3}x^3+3x$.
9. $y=\frac{1}{2}x^2+2x-4$.
10. $y=x^4-2x^2-3$.
11. $y=x^3+\frac{1}{2}x^2-4$.
12. $y=0{,}5x^4+x-2$.
13. $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2-5$.
14. $y=3x^2-0{,}5x^4$.
15. $y=x^3+x^2-x$.
16. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$.
17. $y=x-\frac{1}{3}x^3+x^2$.
18. $y=\frac{1}{5}x^5+3x^3$.
19. $y=x^6-2x^2$.
20. $y=4-2x^9$.

(Oldjuk meg a feladatokat úgy is, hogy a megszokott x és y betűk helyébe p, q, r, s, t vagy más betűjelölést írunk!)

β) Negatív és törtkitevős hatványfüggvények összege és különbsége

1. $y=2x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{2}{3}}$.
2. $y=2x^{\frac{3}{2}}+\sqrt{2x}$.
3. $y=\frac{1}{x}+x^{\frac{3}{4}}$.
4. $s=3t^{\frac{1}{3}}-t^{\frac{5}{2}}$.
5. $r=t^2+2\sqrt{t}+3t^{\frac{4}{3}}$.
6. $y=\sqrt{3x}+\frac{\sqrt{x}}{3}$.
7. $R=\varphi+\frac{1}{\varphi}-2\sqrt{\varphi}$.
8. $y=x^3+\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.
9. $y=2x^3+3\sqrt{x}-\frac{3}{2x^2}$.
10. $y=3x^{\frac{8}{3}}-x^{\frac{5}{4}}$.
11. $y=\sqrt{2x}+2\sqrt[3]{x}$.
12. $y=\frac{3}{\sqrt{x}}+\sqrt{3x}$.
13. $y=\frac{7}{x^2}-3x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$.
14. $s=\frac{4}{\sqrt{t}}+\frac{3}{\sqrt[3]{t}}$.

γ) Szorzat- és törtfüggvények

1. $y=(x+2)\sqrt{x^3}$.
2. $y=(2x+5)(3x^7-8x^2)$.
3. $y=(2-3t)\sqrt{2t^5}$.
4. $y=(2-t)(3t^2+2t+1)$.
5. $y=(x-4)(1-2x+4x^2)$.
6. $y=\frac{2x+3}{1-x^2}$.
7. $y=\frac{1+x}{1-x}$.
8. $y=\frac{2x^2+3x}{1+2x}$.
9. $y=\frac{t^2-3t+1}{3t-1}$.
10. $y=(2x+3)\left(\sqrt{x}-4x^{\frac{1}{3}}\right)$.
11. $y=\left(\frac{1}{x}-3x^4\right)\left(\frac{5}{x^2}-3x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
12. $s=\left(\frac{2}{\sqrt{t}}-t^{\frac{1}{3}}\right)\left(t^2+2\sqrt{t}+3t^{\frac{5}{4}}\right)$.
13. $y=\left(x^6+\frac{1}{5}x^5-x\right)\left(3x^2-\frac{1}{2}x^4\right)$.
14. $y=\left(x^3-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
15. $y=\frac{t^3+4}{1+2t}$.
16. $y=\frac{3-x^3}{2x^2+5}$.
17. $s=\frac{2t^2-4t}{3-2t^2}$.
18. $y=\frac{x^3-1}{x^2-3x}$.
19. $y=\frac{x}{x^2-5}$.
20. $y=\frac{x-1}{x^3}$.

δ) Néhány egyszerű transzcendens függvény differenciálhányadosa

1. $y=\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$.

$$y'=\frac{\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x.$$

2. $$y=\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$y'=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\operatorname{ctg}^2 x).$$

3. $y=e^{-x}=\left(\dfrac{1}{e}\right)^x$. Mivel $\ln\dfrac{1}{e}=-1$, azért $y'=-1\cdot\left(\dfrac{1}{e}\right)^x=-e^{-x}$.

4. $y=\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. $y'=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch} x$.

5. $y=\operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$. $y'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\operatorname{sh} x$.

6. $y=\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ $y'=\dfrac{\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}=1-\operatorname{th}^2 x.$

7. $y=\operatorname{cth} x=\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$. $y'=\dfrac{\operatorname{sh}^2 x-\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}=1-\operatorname{cth}^2 x.$

8. $y=\operatorname{arc}\sin x$. $x=\sin y$.

$$\frac{dx}{dy}=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}.$$

$$y'=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{(\operatorname{arc}\sin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

(*Megjegyzés:* Itt $\operatorname{arc}\sin x$ főértéke értendő.)

9. $y=\operatorname{arc}\cos x$. $x=\cos y$.

$$\frac{dx}{dy}=-\sin y=-\sqrt{1-\cos^2 y}=-\sqrt{1-x^2}$$

$$y'=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\boxed{(\operatorname{arc}\cos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

10. $y = \operatorname{arc\,tg}\, x.$ $\qquad x = \operatorname{tg}\, y.$

$$\frac{dx}{dy} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2.$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\boxed{(\operatorname{arc\,tg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}.}$$

11. $y = \operatorname{arc\,ctg}\, x.$ $\qquad x = \operatorname{ctg}\, y.$

$$\frac{dx}{dy} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 y) = -(1+x^2).$$

$$y' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$\boxed{(\operatorname{arc\,ctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}.}$$

12. $y = \ln x.$ $\qquad x = e^y.$

$$\frac{dx}{dy} = e^y = x.$$

$$y' = \frac{1}{x}.$$

13. $y = \operatorname{ar\,sh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ $\qquad x = \operatorname{sh}\, y.$

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{ch}\, y = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1} = \sqrt{x^2+1}.$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\boxed{(\operatorname{ar\,sh}\, x)' = [\ln(x + \sqrt{x^2+1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.}$$

14. $y = \operatorname{ar\,ch}\, x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}).$ $\qquad x = \operatorname{ch}\, y.$

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{sh}\, y = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1} = \sqrt{x^2-1}.$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\boxed{(\operatorname{ar\,ch}\, x)' = [\ln(x \pm \sqrt{x^2-1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.}$$

15. $y=\operatorname{ar\,cth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, ahol $|x|<1$.

$$x=\operatorname{th} y.$$

$$\frac{dx}{dy}=1-\operatorname{th}^2 y=1-x^2.$$

$$y'=\frac{1}{1-x^2}.$$

$$\boxed{(\operatorname{arc\,th} x)'=\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1}{1-x^2}.}$$

16. $y=\operatorname{ar\,cth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$, ahol $|x|>1$.

$$x=\operatorname{cth} y.$$

$$\frac{dx}{dy}=1-\operatorname{cth}^2 y=1-x^2.$$

$$y=\frac{1}{1-x^2}.$$

$$\boxed{(\operatorname{ar\,cth} x)'=\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\right)'=\frac{1}{1-x^2}.}$$

m) **Összetett függvény differenciálása (láncszabály)**

Legyen $y=y[u(x)]$ összetett függvény, ahol

$$u=u(x)$$

és

$$y=y(u)$$

is differenciálható függvények.

Az összetett függvény differenciahányadosa:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

A differenciálhányados:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=y'[u(x)]\cdot u'(x).$$

$$\boxed{y[u(x)]'=y'[u(x)]\cdot u'(x)=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.}$$

Példa:

$$y=\sin(3x^2-2x).$$

Legyen $u=3x^2-2x$, akkor $y=\sin u$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(\cos u)(6x-2)=(6x-2)\cdot\cos(3x^2-2).$$

Gyakorló feladatok:

1. $y=(3x^2-5x+3)^4$.
2. $y=\sqrt[3]{x^3-2x^2}$.
3. $y=\dfrac{(3x^2-2)^4+1}{(2x-3)^3}$.
4. $y=\sin(5x^2-3x)$.
5. $y=e^{4x+3x^4}$.
6. $y=\operatorname{ch}(3x^2-x+1)$.
7. $y=\arcsin(3x+6)$.
8. $y=\ln(4x^3-6x+4)$.
9. $y=\operatorname{ar\,sh}(2x-4)$.
10. $y=\left(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{x+1}\right)^2$.
11. $y=\sqrt{3x-\sqrt{x}}$.
12. $y=\dfrac{\sqrt{2-3x}}{1+\sqrt{x}}$.
13. $y=\cos\sqrt{1-x^2}$.
14. $y=e^{\sqrt{x+1}}$.
15. $y=\operatorname{sh}\sqrt{5x+1}$.
16. $y=\arcsin\sqrt{x-x^2}$.
17. $y=\ln\sqrt{3+x}$.
18. $y=\operatorname{ar\,ch}\sqrt{6x+4}$.
19. $y=\left(\dfrac{3x+1}{2x-4}\right)^3$.
20. $y=\sqrt[3]{\dfrac{2x-1}{x+3}}$.
21. $y=\dfrac{1-\dfrac{1}{2x}}{3x+\dfrac{1}{2x^2}}$.
22. $y=\operatorname{tg}\dfrac{x-1}{3x+1}$.
23. $y=e^{\frac{x}{1+x}}$.
24. $y=\operatorname{th}\dfrac{2x}{3-x}$.
25. $y=\arccos\dfrac{1}{2x}$.
26. $y=\ln\dfrac{3x^2-6}{x^4+3x^2}$.
27. $y=\operatorname{ar\,th}\dfrac{1}{x}$.
28. $y=\sin^4 x$.
29. $y=\sqrt{\cos x}$.
30. $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos 2x}$.
31. $y=\operatorname{tg}(\sin x)$.
32. $y=e^{\cos x}$.
33. $y=\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x)$.
34. $y=\arcsin(\operatorname{tg} x)$.
35. $y=\ln(\cos 2x)$.
36. $y=\operatorname{ar\,sh}(\sin 3x)$.
37. $y=(e^{3x}-e^{4x})$.
38. $y=\sqrt[3]{e^x+e^{-x}}$.
39. $y=\dfrac{e^x-e^{x^2}}{1-e^{2x}}$.
40. $y=\sin(e^{3x})$.
41. $y=e^{e^x}$.
42. $y=\operatorname{th}(e^{2x}-e^x)$.

43. $y=\arcsin(e^{x^2})$.

44. $y=\ln(1+e^{2x})$.

45. $y=\operatorname{ar\,cth}\left(e^x+\frac{1}{x}\right)$.

46. $y=\operatorname{ch}^3 4x$.

47. $y=\sqrt[5]{\operatorname{th} x}$.

48. $y=\frac{\operatorname{ch} x-1}{\operatorname{th} 2x}$.

49. $y=\operatorname{ctg}(\operatorname{sh} 3x)$.

50. $y=e^{\operatorname{cth} x}$.

51. $y=\operatorname{cth}(1-\operatorname{sh} x)$.

52. $y=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sh} x)$.

53. $y=\ln(2-\operatorname{cth} x)$.

54. $y=\operatorname{ar\,sh}(\operatorname{ch}^2 x)$.

55. $y=\arcsin^4 2x$.

56. $y=\sqrt[3]{\arccos x}$.

57. $y=\frac{\arcsin x}{\arccos x}$.

58. $y=\sin(1-\arcsin x)$.

59. $y=e^{\operatorname{arc\,tg} x}$.

60. $y=\operatorname{sh}(\operatorname{arc\,ctg} x)$.

61. $y=\arcsin(\operatorname{arc\,tg} x)$.

62. $y=\ln(\arcsin x)$.

63. $y=\operatorname{ar\,sh}(\arccos x)$.

64. $y=\ln^3(1-2x)$.

65. $y=\sqrt[4]{\ln x}$.

66. $y=\frac{\ln 2x-1}{\ln x}$.

67. $y=\cos(\ln 3x)$.

68. $y=e^{x+\ln 4x}$.

69. $y=\operatorname{ch}(\ln 2x)$.

70. $y=\operatorname{arc\,tg}(\ln x)$.

71. $y=\ln(\ln 5x)$.

72. $y=\operatorname{ar\,ch}(\ln x)$.

73. $y=\operatorname{ar\,th}^2 3x$.

74. $y=\sqrt[4]{\operatorname{ar\,ch} x}$.

75. $y=\frac{\operatorname{ar\,cth} x}{\operatorname{ar\,ch} x}$.

76. $y=\cos(\operatorname{ar\,sh} x)$.

77. $y=e^{\operatorname{ar\,ch} x}$.

78. $y=\operatorname{sh}(1-\operatorname{ar\,sh} x)$.

79. $y=\arcsin(\operatorname{ar\,sh} x)$.

80. $y=\ln(\operatorname{ar\,ch} x)$.

n) **Logaritmikus differenciálás**

Ha az $y=f(x)$ függvény *exponenciális hatványfüggvény*, azaz $[a(x)]^{b(x)}$ alakú, vagy valamilyen *összetett szorzat-*, illetve *törtfüggvény*, a differenciálhányados kiszámítására alkalmazzuk a logaritmikus differenciálás módszerét. Vesszük mindkét oldal e-alapú logaritmusát és az így nyert kifejezés mindkét oldalát differenciáljuk, majd y'-t kifejezzük a nyert egyenlőségből.

Példák:

1. $y=x^x$.

Vesszük mindkét oldal logaritmusát:

$$\ln y=x\cdot\ln x.$$

Mindkét oldalt differenciáljuk. (Vigyázzunk arra, hogy y függvénye x-nek, tehát $\ln y$ összetett függvényt jelent!)

$$\frac{y'}{y}=\ln x+1.$$

Ebből

$$y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1).$$

Megjegyzés: Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a függvényt átalakítjuk e-alapú exponenciális függvénnyé és úgy differenciáljuk:

$$y=x^x=e^{x\ln x};\quad y'=e^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1).$$

2. $$y=\frac{x^2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+3}}.$$

Ha az adott függvényt mint összetett függvények szorzatát és hányadosát akarnánk differenciálni, meglehetősen bonyolult algebrai kifejezésre jutnánk. A számítás egyszerűsítésére alkalmazzuk inkább a logaritmikus differenciálás módszerét.

Vesszük mindkét oldal logaritmusát:

$$\ln y=2\ln x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\ln(x^2+3).$$

Mindkét oldalt differenciáljuk:

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+3}.$$

Ebből kifejezzük y'-t:

$$y'=y\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+3}\right)=$$

$$=\frac{x^2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+3}}\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+3}\right).$$

3. $y=x^{\frac{1}{x}}$.

4. $y=(1-x)^{x^2}$.

5. $y=(1+x)^{x^2}$.

6. $y=2x\sqrt{3x}$.

7. $x=3(t^2-6t)^t$.

8. $y=3^{x^2+3}$.

9. $y=\left(\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$.

10. $y=3(x+1)^{x+1}$.

11. $y=(x^2-4)^{\frac{1}{2x}}$.

12. $y=2x^{x^3-3x}$.

13. $y=4(3x^2-4x)^{3x}$.

14. $y=(1+\ln x)^{x^2}$.

15. $y=(2t+5)^{t^2+3}$.

16. $y=x^{\sqrt{1-x}}$.

17. $y=t^{e^t}$.

18. $y=(1-3x)^{\ln x}$.

19. $y=x^{\frac{x}{x+1}}$.

20. $y=3t^{t^2+3t+1}$.

21. $y=(x\ln x)^x$.

22. $y=(x+1)^{e^x}$.

23. $y=x^{e^{x+1}}$.

24. $y=(\sqrt{x^2+4})^{\frac{x}{2}}$.

25. $y=x^2(x^2+4)^{2x}$.

26. $y=\sqrt[x]{3x^2-6x+7}$.

27. $y=(2x+7)^{\frac{1}{2x+1}}$.

28. $y=(1-x^2)^{\sqrt{1-x}}$.

29. $y=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{e^x}$;

30. $y=x^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$.

31. $y=2(x^2+4x+3)^{x+1}$.

32. $y=[\ln(2t+1)]^t$.

33. $y=\frac{1+x^2}{x^3\sqrt{1-x^2}}$.

34. $y=x^3(x^2+4)^{\frac{1}{2}}(x^3+3x)^{\frac{1}{3}}$.

35. $y=\frac{(2x-5)^3}{(1-5x^2)\sqrt{x^2-1}}$.

36. $y=\frac{3x^2\sqrt{2x+7}}{\sqrt{x^2+5}}$.

37. $y=(x+1)\cdot x^x$.

38. $y=(x+1)\cdot x^{\frac{1}{x}}$.

39. $y=x^5\cdot 3^{x^2}$.

40. $y=x^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x$.

41. $y=\frac{1+4t^2}{t^2\sqrt{(1+t^2)^3}}$.

42. $y=t^2(1-t^2)^{\frac{1}{2}}(1-t^3)^{\frac{1}{3}}$.

43. $f(x)=\frac{2x^2}{(x-1)^2\sqrt{2x+4}}$;

44. $f(x)=4x^3(1-2x)^7(x+5)^4$.

45. $x=\frac{2t^2(1-3t^2)^3}{(1-t+t^2)^2}$.

46. $x=\frac{2y^3\sqrt{6y+1}}{\sqrt{3y^2+4y+4}}$.

47. $y=\frac{x^2}{5\sqrt{6x+5}\sqrt[3]{3x^2+4}}$.

48. $y=\frac{2x\sqrt{3x^2+2x+1}}{\sqrt[3]{x^3-3x}}$.

49. $y=\frac{(3t^2-2)\sqrt{t^2+3}}{2t^2-5t+6}$.

50. $y=7x\sqrt{3-4x}\cdot\sqrt[3]{4x^3-3x^2}$.

51. $y=4(1-x^2)\sqrt{1-x}\sqrt[3]{1+x}$.

52. $y=\sqrt[3]{\frac{(x-2)(x-3)}{(x-4)(x-5)}}$.

53. $y=\frac{(2-3t)^3\sqrt{1+t}}{(3-2t)^2\sqrt[3]{1-t}}$.

54. $y=\frac{x^3\sqrt{1+\ln x}}{(1+x)^4}$.

o) Implicit függvények differenciálása

Ha y implicit függvény, azaz a függvény egy az y-ra meg nem oldott egyenlettel van megadva, akkor a differenciálhányados meghatározása céljából az egyenlet mindkét oldalát x szerint kell differenciálnunk, figyelembe véve, hogy az y (éppen ezen egyenlettel értelmezett) függvénye x-nek.

Példák:

1. Határozzuk meg az

$$xy+x^2y+y^2=0$$

implicit függvénynek deriváltját.

Az egyenletet tagonként differenciáljuk:

$$xy'+y+x^2y'+2xy+2yy'=0.$$

Fejezzük ki y'-t:

$$y'=-\frac{y+2xy}{x+x^2+2y}\left(=-\frac{f'_x}{f'_y}\right).$$

2. $x^2y-4y^2=0.$
3. $3x^2y+4x-2y=0.$
4. $y^3-3xy+x^2=0.$
5. $x^2y+3y+x^2=16.$
6. $x^3+2xy-y^2=4.$
7. $x^2+2xy-y^3=0.$
8. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=6.$
9. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}=0.$
10. $3x^3-xy^2-2y=0.$
11. $x^2y+2xy+y^2=0.$
12. $y^2-2xy^2+x^2y^2+x^2=0.$
13. $xy^2+2x^2y+3xy=5.$
14. $y^3+3x^2y+xy^2-3x+5=0.$
15. $e^{x+y}+e^{x-y}=x.$
16. $\sin^2 x\,\cos^2 y=0.$
17. $x^2=y^2\ln xy.$
18. $e^{2x}-\ln(y^2+4)+7=0.$
19. $e^{2x+y}+\sin(x+2y)=0.$
20. $3^y\cdot 2^x=\operatorname{arctg} y^2.$
21. $\arcsin xy-\operatorname{arc\,tg}(\ln y)=0.$
22. $(\sin y)^{x^2}-(\cos x)^{y^2}=0.$
23. $(\sin x)^y=y^{\sin x}.$
24. $\sqrt{x^2+y^2}=\ln\sqrt{x^2-y^2}.$
25. $\ln(\sin xy)-e^{x+y}=0.$
26. $x^2\sin y-y^2\sin x=16.$
27. $e^{\frac{2}{x}}\cdot\sin\frac{y}{2}-e^{\frac{x}{2}}\sin\frac{2}{y}=0.$
28. $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=0.$
29. $2\ln(x+y)+\ln\frac{x}{y}=0.$
30. $x^{\ln y}+y^{\ln x}=x+y.$

p) Paraméteres alakban megadott függvények differenciálása

Az

$$x=\varphi(t)$$
$$y=\psi(t)$$

egyenletrendszer jelentse egy függvény paraméteres alakját, ahol φ és ψ a t paraméter differenciálható függvényei.

Ha t értéke $(t+\Delta t)$-re növekszik, x és y megváltozása Δx és Δy, akkor a differenciák hányadosa így írható:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{\frac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\Delta t}}{\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}}.$$

Ha $\Delta x\to 0$, és vele együtt $\Delta t\to 0$, akkor a differenciálhányados:

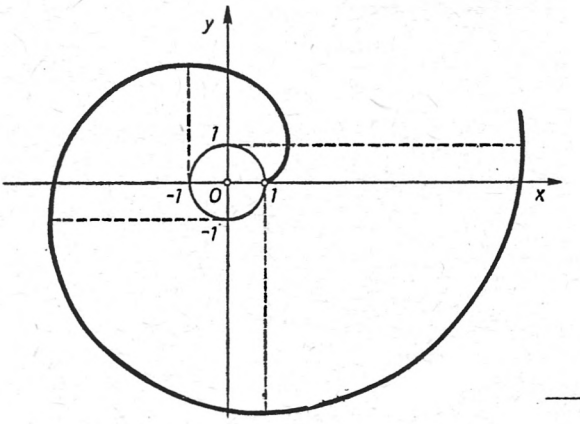
$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\Delta t}}{\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}}=$$

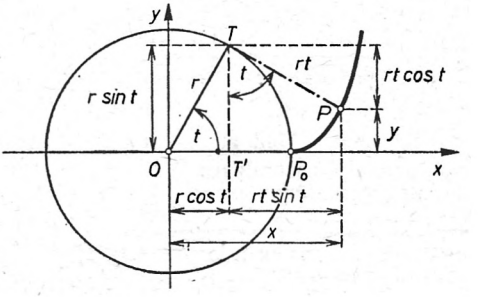
$$=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

$$\left.\begin{aligned}x&=\varphi(t)\\y&=\psi(t)\end{aligned}\right\}\quad\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Példák:

1. A *körevolvens* (l. 15. ábra) paraméteres egyenletrendszere:





15. ábra.

$$x=r(\cos t+t\sin t)$$
$$y=r(\sin t-t\cos t)$$

Mivel $$\frac{dy}{dt}=rt\sin t$$

és $$\frac{dx}{dt}=rt\cos t,$$

azért $$\frac{dy}{dx}=\frac{rt\sin t}{rt\cos t}=\operatorname{tg} t.$$

*

Határozzuk meg az alábbi paraméteres egyenletrendszerrel megadott görbék érintőjének iránytangensét, az adott paraméterértékkel jellemzett pontban; írjuk fel az érintőegyenes és a normális egyenletét: számítsuk ki a szubtangenst és szubnormálist

2. $x=t^2-1,\ y=t^3-4;\ t_0=2.$

3. $x=t^2+1,\ y=t+3;\ t_0=2.$

4. $x=3t^2-1,\ y=1-2t;\ t_0=1.$

5. $x=3-2t,\ y=t^3-3;\ t_0=1.$

6. $x=t^2+2,\ y=t^3+1;\ t_0=1.$

7. $x=4t+t^2,\ y=2t^2;\ t_0=1.$

8. $x=2t,\ y=\frac{3}{t};\ t_0=3.$

9. $x=\sin t,\ y=\cos 2t;\ t_0=\frac{\pi}{6}.$

10. $x=\frac{4}{\cos t},\ y=2\operatorname{tg} t;\ t_0=\frac{\pi}{6}.$

11. $x=\operatorname{tg} t,\ y=\sin 2t;\ t_0=0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4}.$

12. $x=\frac{1}{\cos t},\ y=\operatorname{tg} t;\ t_0=\frac{\pi}{4}.$

13. $x=t^3+2t^2+3,\ y=t^3+3t+5;\ t_0=-2.$

14. $x=\frac{1}{t+1},\ y=\sqrt{5-t^2};\ t_0=0,\ 1,\ 2.$

15. $x=\frac{1}{1-2t},\ y=\sqrt{2t^2+1};\ t_0=0,\ 2.$

16. $x=\frac{1}{t+1},\ y=t^2+1;\ t_0=1.$

17. $x=\frac{3t}{1+t^3},\ y=\frac{3t^2}{1+t^3};\ t_0=2.$

18. $x=\sin^3 t,\ y=\cos^3 t;\ t_0=\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{4}.$

19. $x=4\cos t,\ y=2\sin^2 t;\ t_0=\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{4}.$

20. $x=2t^2-1,\ y=\dfrac{1}{t^2+1};\ t_0=1.$

Síkban mozgó pont pályagörbéjét megadhatjuk úgy, hogy megadjuk a pillanatnyi hely x és y koordinátáját az idő függvényében:

$$x=x\,(t),$$
$$y=y\,(t).$$

Ez a paraméteres egyenletrendszer alkalmas az egész pontmozgás jellemzésére. A *sebesség* és *gyorsulás* x és y irányú összetevőit megadják a

$$v_x=\dot{x}\,(t),$$
$$v_y=\dot{y}\,(t),$$

első és az

$$a_x=\ddot{x}\,(t),$$
$$a_y=\ddot{y}\,(t)$$

második differenciálhányadosok.

A sebesség nagysága:

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2};$$

a sebesség iránycosinusai:

$$\cos\alpha=\frac{v_x}{v}=\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},\qquad \cos\beta=\frac{v_y}{v}=\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}.$$

A gyorsulás nagysága:

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2};$$

a gyorsulás iránycosinusai:

$$\cos\lambda=\frac{a_x}{a}=\frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}},\qquad \cos\mu=\frac{a_y}{a}=\frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}}.$$

Az alábbi paraméteres egyenletrendszerrel megadott függvények egy-egy pontmozgást határoznak meg. Rajzoljuk meg a pályagörbét; számítsuk ki a sebesség és gyorsulás összetevőit, nagyságát és iránycosinusait:

21. $x=R\cos t,\ y=R\sin t$ } kör.

22. $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ } ellipszis.

23. $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ y=\dfrac{2t}{1+t^2}$ } kör.

24. $x=\dfrac{t^2+1}{t^2-1},\ y=\dfrac{2t}{t^2-1}$ } egyenlő szárú hiperbola.

25. $\left.\begin{aligned} x&=\frac{3t}{1+t^3}\\ y&=\frac{3t^2}{1+t^3}\end{aligned}\right\}$ Descartes-féle levél.

26. $\left.\begin{aligned} x&=ct\\ y&=\frac{1}{2}g\,t^2\end{aligned}\right\}$ vízszintes hajítás: parabola.

27. $\left.\begin{aligned} x&=R(t-\sin t)\\ y&=R\,(1-\cos t)\end{aligned}\right\}$ ciklois.

28. $\left.\begin{aligned} x&=Rt-(R-a)\sin t\\ y&=R-(R-a)\cos t\end{aligned}\right\}$ nyújtott ciklois.

q) Polárkoordinátás függvények

α) Ha a független változót polárszögnek és a függő változót rádiusz-vektornak tekintjük, az

$$r=r\,(\varphi)$$

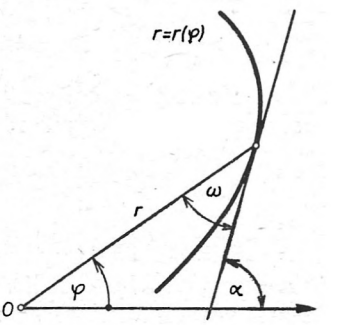
függvény egy ún. polárkoordinátás görbét jellemez.

A *görbe érintője és a rádiusz-vektor által bezárt szög tangensét* a következőképpen számítjuk:

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}.$$

Az *érintő iránytangense* pedig $(\alpha=\omega+\varphi)$ (L. 16. ábra.)

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\omega+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}\varphi}.$$



16. ábra.

β) *Két* polárkoordinátás egyenlettel megadott *görbe metszési szögének* tangense:

$$\operatorname{tg}\Phi=\frac{\operatorname{tg}\omega_1-\operatorname{tg}\omega_2}{1+\operatorname{tg}\omega_1\cdot\operatorname{tg}\omega_2}.$$

γ) A *görbe szélső pontjai* azok, melyeknél $\alpha=0$, tehát $\operatorname{tg}\omega=-\operatorname{tg}\varphi$,

illetve $\alpha=\frac{\pi}{2}$, tehát

$$\operatorname{tg}\omega\cdot\operatorname{tg}\varphi=1.$$

Példák:

α) **1.** Mutassuk ki, hogy az $r=a\cdot e^{c\varphi}$ egyenletű, ún. *logaritmikus spirálist* a póluson átmenő bármely egyenes állandó szög alatt metszi.

Határozzuk meg az alábbi görbéknél az érintő és a rádiusz-vektor által bezárt szöget, valamint az érintő irányszögét:

2. $r=a\varphi$, $(a>0)$; *(archimedesi spirális).*

3. $r=\frac{b}{\varphi}$, $(b>0)$; *(hiperbolikus spirális).*

4. $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$; *(lemniszkáta).*

5. $r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$ $(p>0)$; (ha $\varepsilon<1$, *ellipszis*; ha $\varepsilon=1$, *parabola*; ha $\varepsilon>1$, *hiperbola*).

β) Mutassuk ki, hogy az alábbi görbék egymást derékszög alatt metszik:

1. $r=a(1+\sin\varphi)$, $r=a(1-\sin\varphi)$.

2. $r=2\sin\varphi$, $r=2\cos\varphi$.

3. $r=4\cos^2\frac{\varphi}{2}$, $r=4\sin^2\frac{\varphi}{2}$,

Határozzuk meg az alábbi görbék metszési szögét:

4. $r=4\cos\varphi$, $r=4(1-\cos\varphi)$.

5. $r=2(1+\cos\varphi)$, $r=6\cos\varphi$.

6. $r=4(1-\sin\varphi)$, $r=4\sin\varphi$.

7. $r=\sin\varphi$, $r=\sin 2\varphi$.

8. $r=\sin\varphi$, $r=\cos 2\varphi$.

9. $r=\cos 2\varphi+1$, $r=\sin 2\varphi$.

10. $r^2\sin 2\varphi=8$, $r=\frac{2}{\cos\varphi}$.

11. $r^2\sin 2\varphi=4$, $r^2=16\sin 2\varphi$.

12. $r=4\sin\varphi$, $r=4\sin\varphi\cdot\operatorname{tg}\varphi$.

13. $r=\sin\varphi+\cos\varphi$, $r=2\sin\varphi$.

γ) Határozzuk meg az alábbi görbék szélső pontjait:

1. $r=2\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

3. $r=4(1-\cos\varphi)$.

2. $r=\sin\varphi+\cos\varphi$.

4. $r=\sin 2\varphi$.

5. $r=5(1+\cos\varphi)$ *(kardioid).*

δ) Síkban mozgó pont mozgását úgy is leírhatjuk, hogy megadjuk polárkoordinátáit az idő függvényében:

$$r=r(t),$$
$$\varphi=\varphi(t).$$

Ez esetben célszerű a *sebességet* és *gyorsulást* két olyan összetevőre bontani, melyek közül az egyik rádiusz-vektor irányú (v_r) és a másik rá merőleges (v_φ):

$$v_r=\dot{r};\quad v_\varphi=r\cdot\dot{\varphi},$$
$$a_r=\ddot{r}-r\cdot\dot{\varphi}^2;\quad a_\varphi=2\dot{r}\cdot\dot{\varphi}+r\cdot\ddot{\varphi}.$$

A sebesség és gyorsulás x és y irányú összetevőit annak alapján számíthatjuk, hogy a polárkoordináták és a derékszögű koordináták között a következő összefüggések állnak fenn:

$$x=r\cdot\cos\varphi,\quad y=r\cdot\sin\varphi.$$

Tehát

$$v_x=\dot{x}=\dot{r}\cdot\cos\varphi-r\cdot\sin\varphi\cdot\dot{\varphi},$$
$$v_y=\dot{y}=\dot{r}\cdot\sin\varphi+r\cdot\cos\varphi\cdot\dot{\varphi};$$
$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2};$$
$$\cos\alpha=\frac{v_x}{v},\quad \cos\beta=\frac{v_y}{v};$$

és hasonlóan:

$$a_x = \ddot{x} = \ddot{r}\cdot\cos\varphi - 2\dot{r}\cdot\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} - r\cdot\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 - r\cdot\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi},$$

$$a_y = \ddot{y} = \ddot{r}\cdot\sin\varphi + 2\dot{r}\cdot\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} - r\cdot\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 + r\cdot\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi};$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2} = \sqrt{(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)^2+(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})^2};$$

$$\cos\lambda = \frac{a_x}{a}, \qquad \cos\mu = \frac{a_y}{a}.$$

Az alábbi polárkoordinátás, paraméteres egyenletrendszerrel megadott függvények egy-egy pontmozgást határoznak meg. Rajzoljuk meg a pályagörbét; számítsuk ki a sebesség és gyorsulás összetevőit, az összetevők nagyságát és iránycosinusait:

1. $\left.\begin{aligned} r &= R \\ \varphi &= \omega t \end{aligned}\right\}$ kör.

2. $\left.\begin{aligned} r &= 3t \\ \varphi &= \omega t \end{aligned}\right\}$ archimedesi spirális.

3. $\left.\begin{aligned} r &= \frac{4}{t} \\ \varphi &= 2t \end{aligned}\right\}$ hiperbolikus spirális.

4. $\left.\begin{aligned} r &= e^t \\ \varphi &= 4t \end{aligned}\right\}$ logaritmikus spirális.

5. $\left.\begin{aligned} r &= 2\sqrt{2t-1} \\ 2\varphi &= \arccos t \end{aligned}\right\}$ lemniszkáta.

6. $\left.\begin{aligned} r &= \frac{4+4t^2}{1+3t^2} \\ \varphi &= 2\operatorname{arc\,tg} t \end{aligned}\right\}$ ellipszis.

7. $\left.\begin{aligned} r &= \frac{1}{t} \\ \varphi &= 2\arcsin t \end{aligned}\right\}$ parabola.

8. $\left.\begin{aligned} r &= 4t \\ \varphi &= \arccos(t-1) \end{aligned}\right\}$ kardioid.

4. §. MAGASABBRENDŰ DIFFERENCIÁLHÁNYADOSOK

a) Egytagúak

Tegyük fel, hogy az $y=f(x)$ függvény $y'=f'(x)$ ún. deriváltja az x-nek deriválható függvénye. Az első derivált differenciálhányadosa a második derivált:

$$(y')' = [f'(x)]' = y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

A differenciálást, a megfelelő feltételek mellett, elvben és általánosságban akármeddig folytathatjuk, s rendre nyerjük a harmadik, negyedik, ..., n-edik deriváltat.

Bizonyos függvények n-edik deriváltjait meghatározott törvényszerűség alapján, *közvetlenül fel tudjuk írni.* (L. alább kidolgozott példákat.)

Példák:

1. Képezzük az $y=f(x)=x^4$ függvény magasabbrendű deriváltjait.

$$y' = 4\cdot x^3,$$
$$y'' = 4\cdot 3\cdot x^2 = 12\cdot x^2,$$
$$y''' = 4\cdot 3\cdot 2\cdot x = 24x,$$
$$y^{(4)} = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4! = 24,$$
$$y^{(5)} = 0.$$

2. Képezzük az $y=3x^5-7x^4+8x^3+11x^2-6x+9$ függvény magasabbrendű deriváltjait.

$$y'=15x^4-28x^3+24x^2+22x-6,$$
$$y''=60x^3-84x^2+48x+22,$$
$$y'''=180x^2-168x+48,$$
$$y^{(4)}=360x-168,$$
$$y^{(5)}=360,$$
$$y^{(6)}=0.$$

Megjegyzés: n-edfokú polinom n-szer differenciálható. Az n-nél magasabbrendű deriváltak mind 0-val egyenlők.

3. Határozzuk meg az $y=x^{\frac{5}{2}}$ függvény magasabbrendű deriváltjait.

$$y'=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}},$$
$$y''=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}},$$
$$y'''=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},$$
$$y^{(4)}=-\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)}=\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-1\right)\left(\frac{5}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{5}{2}-n+1\right)x^{\frac{5}{2}-n}.$$

4. Határozzuk meg az $y=x^m$ függvény magasabbrendű deriváltjait.

$$y'=m\cdot x^{m-1},$$
$$y''=m\cdot(m-1)x^{m-2},$$
$$y'''=m\cdot(m-1)\cdot(m-2)x^{m-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)}=m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

Ha m pozitív egész szám, akkor az m-edik derivált

$$y^{(m)}=m!=\text{állandó}$$

és az összes magasabbrendű deriváltak 0-val egyenlők!

Egyébként (negatív vagy törtkitevő esetén) a differenciálás minden határon túl folytatható (a függvény akárhányszor differenciálható)!

5. Határozzuk meg az $y=e^x$ függvény magasabbrendű deriváltjait.

$$y'=e^x,$$
$$y''=e^x,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)}=e^x.$$

Az e^x exponenciális függvény akárhányszor differenciálható és összes deriváltjai megegyeznek magával az eredeti függvénnyel!

6. Határozzuk meg az $y=a^x$ függvény magasabbrendű deriváltjait.

$$y'=a^x\cdot\ln a,$$
$$y''=a^x\cdot(\ln a)^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)}=a^x\cdot(\ln a)^n.$$

7. Határozzuk meg az $y=\ln x$ függvény magasabbrendű deriváltjait.

$$y'=\frac{1}{x}=x^{-1},$$
$$y''=-1\cdot x^{-2},$$
$$y'''=+1\cdot 2x^{-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\,x^{-n}.$$

Megjegyzés: Az utolsó képlet matematikai indukcióval [n-ről $(n+1)$-re való következtetéssel] igazolható!

8. Határozzuk meg az $y=\sin x$ függvény magasabbrendű deriváltjait.

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y''=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y'''=-\cos x=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y^{(4)}=\sin x=\sin\left(x+4\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Megjegyzés: Mint 7-nél.

9. Határozzuk meg az $y=\cos x$ függvény magasabbrendű deriváltjait.

$$y'=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''=-\cos x=\cos\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=\sin x=\cos\left(x+3\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(4)}=\cos x=\cos\left(x+4\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Megjegyzés: Mint 7-nél.

10. Határozzuk meg az $y=e^x\cdot\sin x$ függvény magasabbrendű deriváltjait.

$$y'=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}\,e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$y''=\sqrt{2}\,e^x\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$

$$=2e^x\sin\left(x+2\frac{\pi}{4}\right),$$

$$y'''=2e^x\left[\sin\left(x+2\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+2\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$

$$=2\sqrt{2}\,e^x\sin\left(x+3\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n)}=(\sqrt{2})^n\,e^x\sin\left(x+3\frac{\pi}{4}\right).$$

b) **Összeg és különbség** | Legyen $u=u(x)$ és $v=v(x)$. Képezzük az

$$y=u(x)\pm v(x)$$

függvénynek magasabbrendű deriváltjait.

$$y'=u'(x)\pm v'(x),$$

$$y''=u''\pm v'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\boxed{y^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}.}$$

Összeg- (különbség-) függvény n-edik deriváltja a tagok n-edik deriváltjainak összege (különbsége).

Ez a szabály egyszerű következménye annak, hogy összeg- (különbség-) függvény tagonként differenciálható.

Példák:

1. Határozzuk meg az $y=\frac{1}{x^2+3x+2}$ függvény magasabbrendű deriváltjait.

Ennek a függvénynek n-edik deriváltját egyszerűen tudjuk meghatározni, ha részlettörtekre bontjuk:

$$y=\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=(x+1)^{-1}-(x+2)^{-1}.$$

Ennek a kéttagú függvénynek magasabbrendű deriváltjai:

$$y'=-(x+1)^{-2}+(x+2)^{-2}=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!(x+1)^{-n-1}-(-1)^n\cdot n!(x+2)^{-n-1}=$$

$$=(-1)^n\cdot n!\,\frac{(x+2)^{n+1}-(x+1)^{n+1}}{(x^2+3x+2)^{n+1}}.$$

c) **Leibniz-szabály** | Legyen $u=u(x)$, $v=v(x)$. Képezzük az

$$y=u(x)\cdot v(x)=u\cdot v$$

függvénynek magasabbrendű deriváltjait.

Alkalmazzuk a szorzatfüggvény differenciálási szabályát:

$$y'=u\cdot v'+v\cdot u',$$

$$y''=u\cdot v''+2u'\cdot v'+u''\cdot v.$$

$$y'''=u\cdot v'''+3u'v''+3u''v'+u'''\cdot v,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\boxed{y^{(n)}=u\cdot v^{(n)}+\binom{n}{1}u'\cdot v^{(n-1)}+\binom{n}{2}u''\cdot v^{(n-2)}+\ldots+\binom{n}{n-1}u^{(n-1)}\cdot v'+u^{(n)}\cdot v.}$$

Megjegyzés: Ez a szorzatfüggvény differenciálására vonatkozó *Leibniz-szabály.*

*

Számítsuk ki az alábbi függvények második és harmadik deriváltját:

1. $y=x^4-12x^3-48x^2-50.$
2. $y=x^3-2\sin x.$
3. $y=x\operatorname{arc\,tg} x.$
4. $y=e^{-t}\sin t.$
5. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$
6. $y=\sqrt[3]{x^2}.$
7. $y=e^{4+t^2}.$
8. $y=x^3e^x.$
9. $y=\ln\dfrac{2+3x}{2-3x}.$
10. $y=xe^{-x^2}.$
11. $y=\dfrac{\ln x}{x}.$
12. $y=x^2\ln x.$
13. $y=\arccos x.$
14. $y=t\sin t+\cos t.$
15. $y=4e^{-\frac{t}{2}}\cdot\sin 2t.$
16. $y=6e^{\frac{t}{2}}(\sin 2t+\cos 2t).$
17. $y=3e^{-\frac{t}{3}}\cdot\cos\dfrac{t}{2}.$
18. $y=8e^{-\frac{t}{4}}\left(\sin\dfrac{t}{2}+2\cos\dfrac{t}{2}\right).$
19. $y=\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x.$
20. $y=\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}.$
21. $y=x\arcsin x.$
22. $y=\arcsin(1-x^2).$
23. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$
24. $y=\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{2}{x}.$

*

Számítsuk ki az alábbi függvények magasabbrendű (n-edik) deriváltját:

25. $y=\sin x+\cos x.$
26. $y=\dfrac{1}{x}.$
27. $y=e^{2x}.$
28. $y=\cos 2x.$
29. $y=\dfrac{5}{x^2}.$
30. $y=e^{3x+1}.$
31. $y=e^x\cdot\cos x.$
32. $y=a^x\cdot\cos x.$
33. $y=\dfrac{1}{x}\cdot\ln x.$
34. $y=\dfrac{1}{x^2-x-2}.$
35. $y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}.$

5. §. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS KÖZÉPÉRTÉKTÉTELE

Ha $y=f(x)$ függvény az $a\leqq x\leqq b$ zárt közön (egyértékű és) folytonos, továbbá e köz minden $a<x<b$ belső pontjában differenciálható, akkor található legalább egy, e köz belsejébe eső ξ-érték úgy, hogy

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\quad \text{ahol } a<\xi<b \text{ (Lagrange).}$$

Az egyenlőség bal oldala az $x=a$ és $x=b$ helyhez tartozó görbepontokat összekötő húr iránytangense; az egyenlőség jobb oldala a húr végpontjai közé eső egyik görbepontban az érintő iránytangense. (L. 17. ábra.)

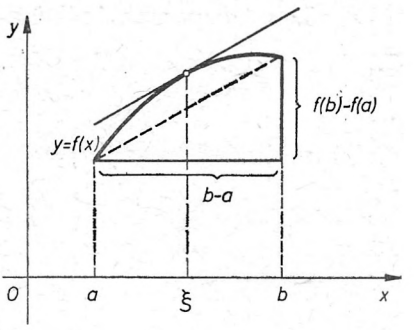
Írjunk a fenti képletben a helyébe x-et és b helyébe $(x+h)$-t,

lesz $b-a=h$ és $\xi=x+\vartheta h$, ahol $0<\vartheta<1$.

Akkor a középértéktételt ilyen alakban írhatjuk:

$$f(x+h)=f(x)+h\cdot f'(x+\vartheta h),\quad 0<\vartheta<1.$$

Figyelemmel kell lennünk arra, hogy az itt szereplő ϑ általában nem állandó, hanem x-től és h-tól is függ [$\vartheta=\vartheta(x,\ h)$].



17. ábra

Példák:

1. Az $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ másodfokú parabolán jelöljünk ki két tetszőleges, egymástól különböző $x=a$ és $x=b$ helyhez tartozó, P_1 és P_2 pontot. Állapítsuk meg azt az $x=\xi$ értéket, melyhez tartozó pontban az érintő párhuzamos a P_1 és P_2 pontokat összekötő húrral.

Az a helyhez tartozó függvényérték:

$$f(a)=\alpha\cdot a^2+\beta\cdot a+\gamma.$$

A b helyhez tartozó függvényérték:

$$f(b)=\alpha b^2+\beta\cdot b+\gamma.$$

A húr iránytangense:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\alpha\cdot b^2+\beta\cdot b+\gamma-\alpha\cdot a^2-\beta\cdot a-\gamma}{b-a}=$$

$$=\frac{\alpha(b^2-a^2)+\beta(b-a)}{b-a}=\alpha(b+a)+\beta.$$

A függvény deriváltja:

$$f'(x)=2\alpha\cdot x+\beta.$$

A keresett ξ helyen az érintő iránytangense:

$$f'(\xi)=2\alpha\xi+\beta.$$

A két iránytangens

$$\alpha(a+b)+\beta=2\alpha\xi+\beta$$

egyenlőségéből:

$$\xi=\frac{a+b}{2}=a+\frac{b-a}{2}.$$

Tehát a parabolánál ξ a húr felezőpontjának abszcisszája! (L. 18. ábra.)

2. Mekkora a ϑ értéke a középértéktétel

$$f(x+h)=f'(x)+h\cdot f'(x+\vartheta h)$$

alakú kifejezésében az $f(x)=e^x$ függvénynél?

Lesz $$e^{x+h}=e^x+h\cdot e^{x+\vartheta h}.$$

Azaz $$e^x\cdot e^h=e^x+h\cdot e^x\cdot e^{\vartheta h}.$$

Egyszerűsíthetünk e^x-szel:

$$e^h=1+h\cdot e^{\vartheta h},$$

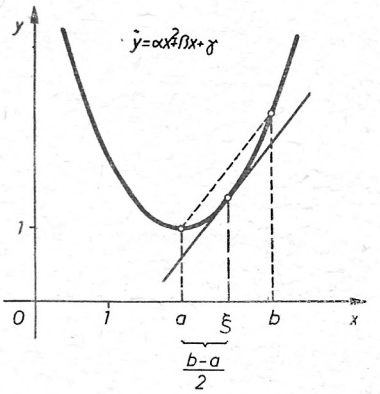
vagy

$$e^{\vartheta h}=\frac{e^h-1}{h}.$$

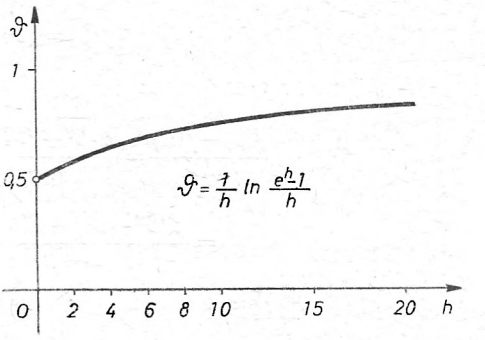
És innen

$$\vartheta=\frac{1}{h}\ln\frac{e^h-1}{h}.$$

Itt csak h-tól függ! (L. 19. ábra.)



18. ábra.



19. ábra.

3. Ugyanaz $f(x)=\ln x$ esetén?

Lesz

$$\ln(x+h)=\ln x+\frac{h}{x+\vartheta h}.$$

Ebből

$$\frac{h}{x+\vartheta h}=\ln\frac{x+h}{x}=\ln\left(1+\frac{h}{x}\right).$$

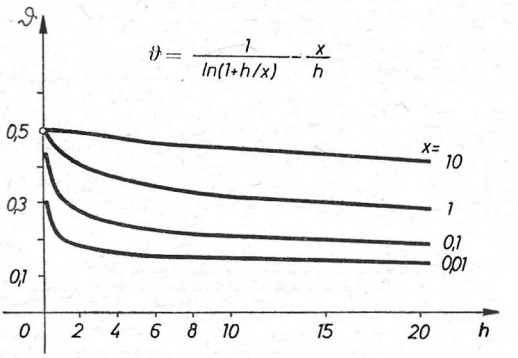
A reciprok értékre térve és h-val átszorozva:

$$x+\vartheta h=\frac{h}{\ln\left(1+\frac{x}{h}\right)}.$$

És innen

$$\vartheta=\frac{1}{\ln\left(1+\frac{x}{h}\right)}-\frac{x}{h}.$$

Itt már ϑ függ x-től és h-tól is! (Lásd 20. ábra.)



20. ábra.

4. Adva $\ln 960=6{,}86693$. Számítsuk ki $\ln 961$ értékét a középértéktétel segítségével, az előző példa szerint, 5 tizedesjegyre.

Akár $\vartheta=0$, akár $\vartheta=1$, az eredmény 5 tizedesjegy pontossággal:

$$\ln 961=6{,}86797.$$

5. Az 1. példa eredményét felhasználva, táblázattal megadott függvény differenciálhányadosát kiszámíthatjuk. (*„Parabolikus differenciálás".*)

x	y	$x+\frac{h}{2}$	$f(x+h)-f(x)$	$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\approx f'\left(x+\frac{h}{2}\right)$
0,00	1,0000	0,02	0,0408	1,02
0,04	1,0408	0,06	0,0425	1,06
0,08	1,0833	0,10	0,0442	1,105
0,12	1,1275	0,14	0,0460	1,15
0,16	1,1735	0,18	0,0479	1,20
0,20	1,2214	0,22	0,0498	1,245
0,24	1,2712	0,26	0,0519	1,30
0,28	1,3231	0,30	0,0540	1,35
0,32	1,3771	0,34	0,0562	1,405
0,36	1,4333	0,38	0,0585	1,46
0,40	1,4918			

6. Adva $\lg 6=0{,}778\ 15$. Számítsuk ki $\lg 6{,}2$ értékét a középértéktétel segítségével, és becsüljük meg a hibát ($\lg e=0{,}434\ 29$).

7. Határozzuk meg az alábbi, táblázattal megadott függvény differenciálhányadosát, ún. *„parabolikus differenciálással"*.

x	0,0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2
y	0,000	0,389	0,717	0,932	1,000	0,909	0,675	0,335	−0,058

MÁSODIK RÉSZ

A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS EGYÉB ALKALMAZÁSAI

6. §. HATÁROZATLAN ALAKOKRA VEZETŐ HATÁRÉRTÉKEK SZÁMÍTÁSA

BERNOULLI—l'HOSPITAL SZABÁLYA

Ha $f(x)$ és $g(x)$ két, az a hely körül értelmezett s ott differenciálható függvény és az $x \to a$ határátmenetnél vagy mind a kettő nullához, vagy mind a kettő a ∞-hez tart, akkor

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

feltéve, hogy a jobb oldali határérték létezik.

Megjegyzés: Gyakran csak a szabály *többszöri alkalmazása* vezet célhoz!

a) $\frac{0}{0}$ alakra vezető határértékek

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

2. $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

3. $$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{n \cdot x^{n-1}}{1} = n \cdot a^{n-1}.$$

4. $$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

b) $\frac{\infty}{\infty}$ **alakra vezető határértékek**

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{5\cos^2 x}{\cos^2 5x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 2x}{\sin 10x} =$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos 2x}{10\sin 10x} = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5}.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0.$

c) $0 \cdot \infty$ **alakra vezető határértékek**

1. $$\lim_{x\to 0} x\cdot \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x} = 0.$$

2. $$\lim_{x\to 0} x\cdot \operatorname{ctg} x = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1.$$

d) $(\infty - \infty)$ **alakra vezető határértékek**

Az adott kifejezés általában olyan törtté alakítható, mely $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alakra vezet határátmenetben.

1. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

2. $$\lim_{x\to 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

e) 1^∞, 1^0, 0^0, ∞^0 **alakra vezető határértékek**

1. $$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Legyen $u = (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$, akkor $\ln u = \dfrac{\ln\cos x}{x^2}$ és

$$\lim_{x\to 0} \ln u = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{tg} x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2\cos^2 x} = -\frac{1}{2}.$$

Ebből pedig $\lim\limits_{x\to 0} u = e^{-\frac{1}{2}}$.

Azaz $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$.

2. $\lim_{x\to 0} x^x$.

Legyen $u=x^x$, akkor $\ln u = x\cdot\ln x$ és

$$\lim_{x\to 0}\ln u = \lim_{x\to 0} x\cdot\ln x = 0.$$

Ebből viszont $\lim_{x\to 0} u = e^0 = 1$.

Azaz $\lim_{x\to 0} x^x = 1$.

3. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}.$$

Legyen $u=\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$, akkor $\ln u = \sin x\cdot\ln\frac{1}{x}$ és

$$\lim_{x\to 0}\ln u = \lim_{x\to 0}\sin x\cdot\ln\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x\cdot\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin 2x}{\cos x - x\sin x} = 0.$$

Ebből $\lim_{x\to 0} u = e^0 = 1$

és így $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$.

4. $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Legyen $u=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, továbbá $\frac{1}{n}=x$ (mikor is $n\to\infty$-nek $x\to 0$ felel meg), azaz $u=(1+x)^{\frac{1}{x}}$,

akkor $\ln u = \frac{\ln(1+x)}{x}$ és

$$\lim_{x\to 0}\ln u = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

Ebből $\lim_{x\to 0} u = e^1 = e$.

Azaz

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

f) Gyakorlófeladatok

Alkalmazzuk *Bernoulli—l'Hospital szabályát* az alábbi határértékek kiszámításánál:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$,
2. $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}^3\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$,
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\ln x}{x\ln x}$.
5. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}\right)$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^3 x}-\dfrac{1}{x^3}\right)$.
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$.
8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^m}{1-x^n}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x-\sin x}$.
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arc\,sin} x}{x}$.
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$.
12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$.
13. $\lim\limits_{x\to 0}(-x^n\cdot\ln x)$.
14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{tg} x}{\ln\operatorname{tg} 3x}$.
15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.
16. $\lim\limits_{x\to a}(x-a)\cdot[\ln(x-a)]^2$.
17. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x\pi}{2}$.
18. $\lim\limits_{x\to\infty}2^x\cdot\operatorname{tg}\dfrac{a}{2^x}$.
19. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.
20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.
21. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$.
22. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{3}{4+2\ln x}}$.

7. §. FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT, GÖRBEDISZKUSSZIÓ

A függvény	ha
a-helyen folytonos	bármilyen kicsiny ε-hoz tartozik oly δ, hogy $\lvert f(x)-f(a)\rvert<\varepsilon$, ha $\lvert x-a\rvert<\delta$.
monoton növekszik	$x_2>x_1$ esetén $f(x_2)\geqq f(x_1)$.
monoton csökken	$x_2>x_1$ esetén $f(x_2)\leqq f(x_1)$.
görbéje alulról konvex (a, b)-ben	$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$, $a\leqq x_1$, $x_2\leqq b$.
görbéje felülről konvex (a, b)-ben	$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$, $a\leqq x_1$, $x_2\leqq b$.

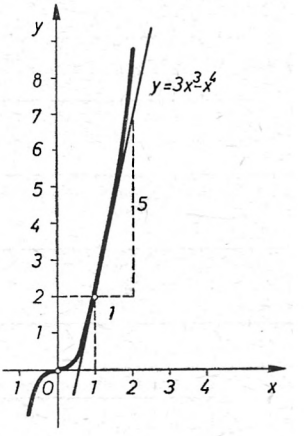
y görbéje		ha y'	és y''
növekszik		>0	
csökken		<0	
alulról konvex		növekszik	>0
felülről konvex		csökken	<0
vízszintes érintőjű		0	
helyi szélső értéke	*maximuma* van, azaz vízszintes érintőjű, felülről konvex	0, előjelet vált és csökken	<0
	minimuma van, azaz vízszintes érintőjű, alulról konvex	0, előjelet vált és növekszik	>0
inflexiós pontja van: sem alulról, sem felülről nem konvex, hanem épp áthajlik		se nem növekszik, se nem csökken, azaz szélsőértéke van	se nem >0, se nem <0, hanem 0, előtte és utána különböző ejőjelű.

Vannak függvények, melyeknél egy adott helyen az első, második stb. deriváltak mind eltűnnek. *Ha az első el nem tűnő, 0-tól különböző derivált párosrendű, akkor a függvénynek szélsőértéke van*, éspedig, ha ez a derivált negatív, akkor a függvénynek maximuma, ha pozitív, a függvénynek minimuma van. Ha az első el nem tűnő, 0-tól különböző derivált *páratlan rendű, akkor a függvénynek inflexiós pontja van.*

Példák:

1. Vizsgáljuk az $y=3x^3-x^4$ függvényt az $x=1$ hely környezetében. (L. 21. ábra.)

$$y'=9x^2-4x^3.$$
$$y''=18x-12x^2.$$
$$[y]_{x=1}=3-1=2.$$
$$[y']_{x=1}=9-4=5.$$
$$[y'']_{x=1}=18-12=6>0.$$



21. ábra.

2. Vizsgáljuk az $y=x^3-x^2-2x$ függvény általános menetét.

a) 0-helyek: az $y=0$ egyenlet gyökei.

$$y=x(x^2-x-2)=0. \quad x_1=0,$$
$$x_2=-1,$$
$$x_3=2.$$

b) Vízszintes érintőjű helyek: az $y'=0$ egyenlet gyökei.

$$y'=3x^2-2x-2=0;$$

$$x_4=\frac{-1+\sqrt{7}}{3}\approx 1{,}22;$$

$$x_5=\frac{1-\sqrt{7}}{3}\approx -0{,}55.$$

c) Szélsőértékek kiválasztása.

$$y''=6x-2. \qquad [y'']_{x=1{,}22}>0, \quad [y'']_{x=-0{,}55}<0.$$

Tehát: $x_4\approx 1{,}22$ helyen minimum van,
$x_5\approx -0{,}55$ helyen maximum van.

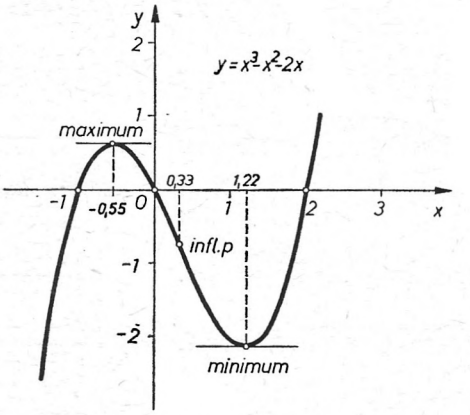
d) Inflexiós pont: $y''=0$ egyenlet gyöke.

$$6x-2=0,$$

$$x_6=\frac{1}{3}\approx 0{,}33.$$

x	-1	$-0{,}55$	0	$0{,}33$	$1{,}22$	2
y	0	$0{,}63$	0	$-0{,}73$	$-2{,}12$	0
y'	3	0	-2	$-2{,}33$	0	6
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

(L. 22. ábra)



22. ábra.

3. Vizsgáljuk az $f(x)=x^5-2x^4+1$ függvényt az $x=0$ helyen:

$$f(x)=x^5-2x^4+1, \qquad f(0)=1,$$
$$f'(x)=5x^4-8x^3, \qquad f'(0)=0,$$
$$f''(x)=20x^3-24x^2, \qquad f''(0)=0,$$
$$f'''(x)=60x^2-48x, \qquad f'''(0)=0,$$
$$f^{(4)}(x)=120x-48, \qquad f^{(4)}(0)=-48<0.$$

A függvénynek $x=0$ helyen tehát maximuma van.

*

Vizsgáljuk az alábbi függvényeket! Az eredmények alapján vázoljuk fel a függvény görbéjét:

4. $y=2x^3-9x^2-24x-12.$

5. $y=2x^3-3x^2-36x+25.$

6. $y=x^3-6x^2-36x+30.$

7. $y=x^3+12x^2+36x-50.$

8. $y=3x^3-9x^2-27x+30.$

9. $y=15x^3+9x^2-27x+30.$

10. $3y=x^3-3x^2-9x+3.$

11. $2y=2+3x-4x^2-x^3.$

12. $5y=2+24x^2-x^4.$

13. $y=x^5-7x^4+19x^3-25x^2+16x-4.$

14. $y=x^5-5x^4+5x^3-1.$

15. $y=\dfrac{6x}{x^2+1}.$

16. $y=x+\dfrac{4}{x}.$

17. $y=(x-2)^2(x-3)^2.$

18. $y=(x-4)^2\,(x-3)^2.$

19. $y=x^2+\dfrac{128}{x}.$

20. $y=\dfrac{x^2+9}{x}.$

21. $y=\dfrac{x^2}{x+1}.$

22. $y=x-\dfrac{108}{x^2}.$

23. $y=\dfrac{6x}{x^3+1}.$

24. $y=x^3+\dfrac{1}{5x}.$

25. $y=\dfrac{x^3-16}{x}.$

26. $xy=x^2+x+1.$

27. $xy+x^2+2x+4=0.$

28. $xy-x^2+y=0.$

29. $y=\dfrac{x}{20}(x-2)^2(x+4)^2.$

30. $y=(2x+1)^3(x+2)^2.$

31. $y=\dfrac{x^2-x+9}{x^2+x+9}.$

32. $y=\dfrac{x^2-3x-19}{5(x+4)}.$

33. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}.$

34. $y=\dfrac{8x}{x^2+2x+4}.$

35. $y=4\,\dfrac{2-x}{x^2+4}.$

36. $y=\dfrac{x}{x^2+6x+9}.$

37. $y=\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x+1}.$

38. $y=\dfrac{x+1}{x^2-4x+1}.$

39. $y=\dfrac{x^3}{2x+4}.$

40. $y=\sin^3 x.$

41. $y=e^x\cos x.$

42. $y=5\operatorname{arc\,tg} x-x$

43. $y=\sin^2 x+\sin 2x.$

44. $y=\dfrac{1}{4}\cos^2 x+\sin^2 x.$

45. $y=e^x\cos 2x.$

46. $y=\sin x+\cos 2x.$

47. $y=\sin 2t+\cos^2 t.$

48. $y=2\sin t+\sin 2t.$

49. $y=2\sin t+\cos 2t.$

50. $y=\cos t-\dfrac{1}{2}\cos 2t.$

51. $y=2\cos t-\sin 2t.$

52. $x=e^{-t}\cdot\sin 2t.$

53. $y=2e^{-\frac{t}{4}}\sin 2t.$

54. $x=8e^{\frac{t}{2}}\cdot\sin t$.

55. $y=5e^{-\frac{t}{2}}\cdot\cos 2t$.

56. $x=2e^{-\frac{t}{8}}\cdot\cos\frac{t}{2}$.

57. $x=5e^{-t}\cdot\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$.

58. $x=4e^{-\frac{t}{8}}\cdot\sin(t+1)$.

59. $x=4e^{-\frac{t}{2}}\cdot\cos 3t$.

60. $4e^{2t}(\sin t+\cos t)$.

61. $x=5e^{\frac{t}{2}}(\sin 2t+2\cos 2t)$.

8. §. SZÉLSŐÉRTÉK-PÉLDÁK ÉS -FELADATOK

1. Egy folyó partján egy 3200 m² területű, téglalap alakú telket kell elkeríteni. Mekkorára válasszuk a téglalap méreteit, hogy a legrövidebb kerítésre legyen szükség? (A folyóparton nem állítunk kerítést.) (L. 23. ábra.)

A telek területe: $x\cdot m=3200$.

A folyóparttal párhuzamos oldalt (x) választjuk független változónak.

Ekkor

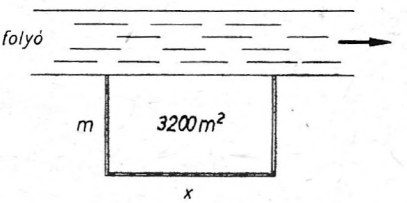
$$m=\frac{3200}{x}.$$

A kerítéshossz értékét y-nal jelölve:

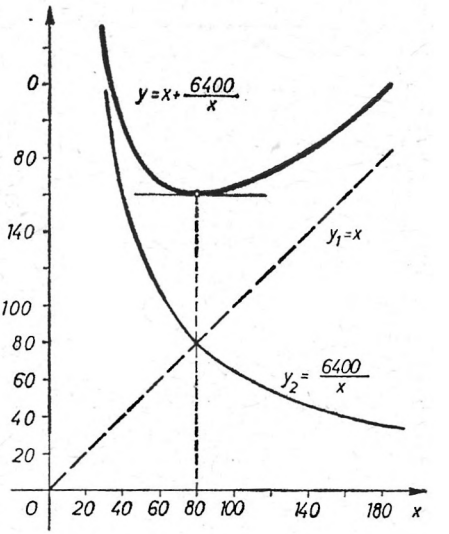
$$y=x+2m=x+\frac{6400}{x}.$$

Azt a pozitív x-et kell meghatározni, ahol y a legkisebb.

Vázoljuk fel a függvény görbéjét. (L. 24. ábra.)



23. ábra.



24. ábra.

Képezzük a függvény deriváltját:

$$y'=1-\frac{6400}{x^2}=\frac{x^2-6400}{x^2}.$$

Szélsőérték csak ott lehet, ahol $y'=0$. A mi esetünkben:

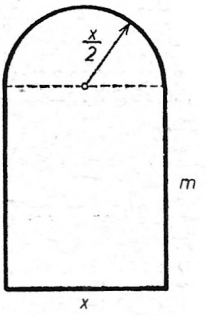
$$x^2-6400=0\text{-ból}\quad x=\pm\sqrt{6400}=\pm 80.$$

A feladatban csak $x=+80$-nak van értelme. E helyen $y=160$, $m=40$.

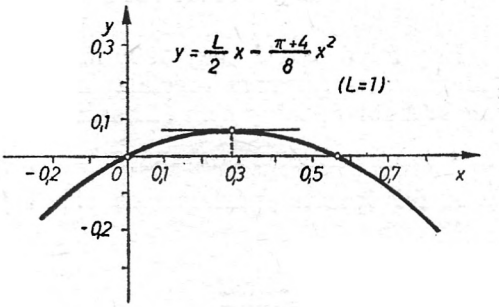
Hogy $x=80$ minimum hely, a függvény görbéjének vázlata nélkül is belátható, mert ha $x<80$, akkor $y'<0$ és

ha $x>80$, akkor $y'>0$.

2. Egy csatorna keresztmetszete egy téglalapból és a téglalap egyik oldala fölé rajzolt félkörből áll. A keresztmetszet kerülete, L adott hosszúságú. Hogyan válasszuk meg a méreteket, hogy a keresztmetszet területe a lehető legnagyobb legyen? (L. 25. ábra.)



25. ábra.



26. ábra.

A kerület:

$$x+2m+\frac{x\pi}{2}=L,$$

ahonnan

$$m=\frac{L-x-\frac{x\pi}{2}}{2}.$$

A keresztmetszet területe:

$$y=mx+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

vagy

$$y=\frac{L}{2}x-\frac{\pi+4}{8}x^2. \quad \text{(Lásd 26. ábra.)}$$

$$y'=\frac{L}{2}-\frac{x+4}{4}x.$$

Ez 0, ha

$$x=\frac{2L}{\pi+4}\approx 0{,}28L.$$

Ekkor $m\approx 0{,}14L$.

3. Egy előírt V térfogatú, négyzet alapú, felül nyitott tartályt akarunk készíteni. Mekkorára válasszuk a méreteket, hogy az elkészítéshez a legkevesebb le-

mezt kelljen felhasználni, azaz, hogy a tartályt határoló lapok területösszege (a felszín) a lehető legkisebb legyen. (L. 27. ábra.)

A térfogat: $a^2m = V$,

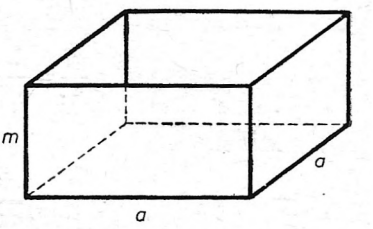
ahonnan

$$m = \frac{V}{a^2}.$$

A felszín: $F = a^2 + 4am$,

vagy

$$F = a^2 + 4\frac{V}{a}.$$ (L. 28. ábra.)



27. ábra.

$$\frac{dF}{da} = 2a - 4\frac{V}{a^2} = 0, \text{ ha } a = \sqrt[3]{2V}.$$

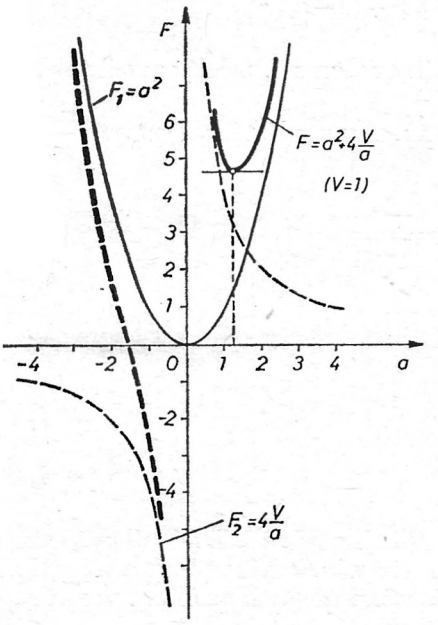
Ezzel

$$m = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}.$$

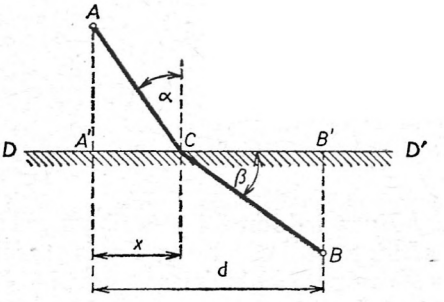
Az alapél és a magasság aránya:

$$\frac{a}{m} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Eszerint a legkisebb felszínű tartálynál az alapél kétszer akkora, mint a magasság.



28. ábra.



29. ábra.

4. A fizikából ismert *Fermat*-féle törvény szerint a fény olyan pályán terjed, amelyen az idő minimumot ér el. Legyen a DD' egyenes vonal két közeg határa, amelyekben a fény terjedési sebessége v_1 és v_2. Melyik úton halad a fénysugár, míg az A pontból B pontba jut? (L. 29. ábra.)

Az A-tól B-ig terjedő

$$\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$$

hosszúságú út megtételéhez szükséges idő:

$$t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2(d-x)^2}}{v_2}.$$

A derivált

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{v_1}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{1}{v_2}\cdot\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}.$$

Mivel

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=0}<0 \quad \text{és} \quad \left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=d}>0,$$

ezért a derivált értéke a $(0, d)$ intervallumban valahol nulla.

A második derivált

$$\frac{d^2t}{dx^2}=\frac{1}{v_1}\cdot\frac{a^2}{(\sqrt{a^2+x^2})^3}+\frac{1}{v_2}\cdot\frac{b^2}{(\sqrt{b^2+(d-x)^2})^3}$$

mindenütt pozitív, $\frac{d^2t}{dx^2}>0$ és így $\frac{dt}{dx}$ mindenütt monoton nő, tehát egynél több 0-helye nem lehet. Ezen a 0-helyen minimum van. Azon x értékre, melyre $\frac{dt}{dx}=0$, fennáll

$$\frac{1}{v_1}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{v_2}\cdot\frac{d-x}{\sqrt{b^2(d-x)^2}},$$

azaz

$$\frac{1}{v_1}\sin\alpha=\frac{1}{v_2}\sin\beta,$$

ahonnan

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2}.$$

Ilyen módon tehát a fénysugár A-ból B-be haladva a DD' választósíkon úgy törik meg, hogy a beesési és törési szögek sinusának hányadosa a megfelelő fénysebességek hányadosával egyenlő (= a második közegnek az elsőre vonatkoztatott törésmutatója; *Snellius—Descartes törvénye*).

5. Határozzuk meg az adott R sugarú gömbbe beírt maximális térfogatú kúp adatait.

6. Egy V köbtartalmú, a és b alapélű és a magasságú csomagot a rajzon látható módon kössünk át zsineggel. Milyennek kell választanunk a csomag méreteit, hogy a lehető legkevesebb zsineg kelljen az átkötéshez? (L. 30. ábra.)

7. Egy egyenes körkúp alapkörének sugara R és magassága M adott. Határozzuk meg a kúpba írható legnagyobb térfogatú henger adatait. (L. 31. ábra).

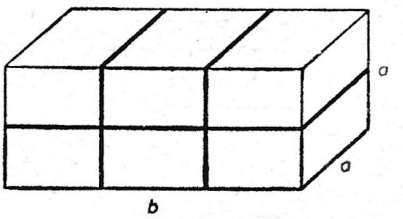
8. Adott egyenlő szárú derékszögű háromszögbe beírt téglalapok közül melyiknek legnagyobb a területe? (L. 32. ábra.)

9. Egy fedőlap nélküli körhenger felszíne A. Hogyan kell megválasztani alapkörének sugarát és magasságát, hogy köbtartalma a lehető legnagyobb legyen?

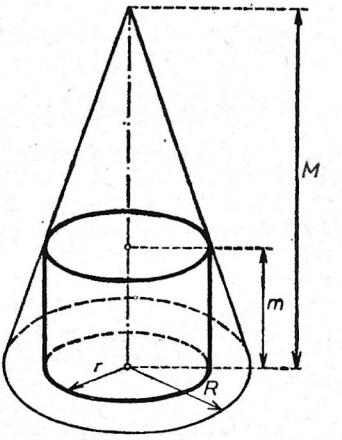
10. Egyenlő szárú derékszögű háromszög befogóján felvett P pontból az átfogóra merőlegest, és az átfogóval párhuzamos egyenest húzunk. Mikor lesz a keletkezett trapéz területe a legnagyobb? (L. 33. ábra.)

11. Hogyan kell megválasztani az R sugarú gömbbe beírható legnagyobb térfogatú henger adatait?

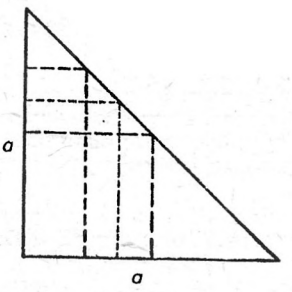
12. Egy falragasz felszíne 1,1025 m². Felső és alsó margó 10 cm és a két oldalon 7,5 cm. Milyen méretűre válasszuk a falragaszt, hogy a margókon belül telenyomtatott felszín a legnagyobb legyen?



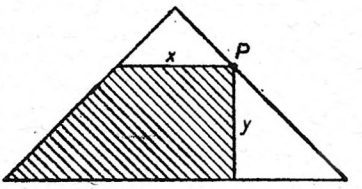
30. ábra.



31. ábra.



32. ábra.



33. ábra.

13. Feltételezve, hogy egy egyenlő szárú háromszög keresztmetszetű és a magasság irányában terhelt gerenda teherbírása egyenesen arányos a szélességgel és a magasság négyzetével, kérdés, hogy milyen méretű a legnagyobb teherbírású gerenda, mely egy d ármérőjű hengeres fagerendából vágható ki?

14. Osszuk fel 8-at két részre úgy,

a) hogy négyzetösszegük minimum;
b) hogy szorzatuk maximum legyen.

15. Egy egyenlő oldalú háromszög alapú egyenes hasáb térfogata 2 m³. Keresendő az alapél, midőn a teljes felszín a legkisebb.

16. Valamely felül nyitott csatorna keresztmetszete egyenlő szárú trapéz, melynek egyenlő oldalai $\pm\frac{4}{3}$meredekségűek. A keresztmetszet területe 44,8 m². Milyen méretű legyen a csatorna, hogy a vízzel érintkező felszín (alap és oldalak) minimális legyen?

17. Feltételezve, hogy a gőzhajó energiafogyasztását a következő tapasztalati képletből számíthatjuk: $E=k(v^2-3vc)$, határozzuk meg E minimumát. (v a hajó sebessége, c a vízsodrás állandó sebessége, k arányossági tényező.)

18. Egy körcikk kerülete 4,8 m. Mekkora sugarú a kör, ha a körcikk területe a legnagyobb?

19. Osszuk fel az $a=4$ számot két részre úgy, hogy az egyik rész négyzetének és a másik rész köbének összege maximum legyen.

20. Valamely körcikk területe 16 m². Mekkora a kör sugara, hogy a körcikk kerülete minimum legyen?

21. Valamely edény két egybevágó, alaplapjával egybeillesztett kúp alakú (kettőskúp). Két egyenlő, r sugarú bádoglemezből készítsük el úgy, hogy a térfogat maximum legyen. Mekkora a kúpok alapköreinek sugara?

22. Egy ablak derékszögű négyszög fölé állított egyenlő oldalú háromszög alakú. Kerülete 4,5 m. Milyennek válasszuk a méreteket, hogy az ablak a legtöbb fényt bocsássa át?

23. Valamely gömb sugara 1,8 m. Számítsuk ki a

a) gömbbe írható legnagyobb térfogatú henger magasságát;

b) gömbbe írható legnagyobb összfelszínű henger magasságát;

c) gömbbe írható legnagyobb térfogatú kúp magasságát;

d) gömb köré írható legkisebb térfogatú kúp magasságát.

24. 108 m² területű falemezből négyzet alapú, felül nyitott dobozt készítünk. Milyen méretek mellett lesz a térfogat maximum?

25. Valamely kör és négyzet kerületének összege állandó. Mutassuk meg, hogy a két síkidom területének összege minimum, ha a kör átmérője egyenlő a négyzet oldalával.

26. Egy gömb és egy kocka felszínének összege állandó. Milyen viszonyban van a gömb átmérője és a kocka éle, midőn a két test térfogatának összege minimum?

27. Egy háromszög kerülete 40 cm. Az egyik oldal 15 cm; mekkora a másik két oldal, mindőn a terület legnagyobb?

28. Keressük meg az $y^2=8x$ parabolának azt a pontját, mely a (6,0) ponttól a legkisebb távolságra van.

29. Egy 15 cm hosszúságú egyenesdarab fölé rajzoljunk egy 10 cm magasságú háromszöget úgy, hogy a kerülete minimum legyen.

30. Feltesszük, hogy a *Hooke-törvény* értelmében valamely rugalmas húr megnyúlásával arányos a húzóerő, azaz $F=k\cdot x$. Kísérleti eredményeink: 6 kg húzóerő, 5,25 cm megnyúlást okoz; 10 kg 8,5 cm-t és 12 kg 11 cm-t. Feltételezve, hogy a k arányossági tényező legvalószínűbb értéke esetén az $F-k\cdot x$ különbségek négyzetösszege minimum, számítsuk ki k értékét, majd hasonlítsuk össze ezt az értéket az egyes mérési eredményekből számított arányossági tényezők számtani középértékével.

31. Egy motoros szállító dereglye kilométerenként állandó üzemanyagot fogyaszt, azaz $y=k\cdot x$, ahol y a megtett út km-ekben és x a fogyasztott üzemanyag literekben. Azonos körülmények között tett megfigyeléseink eredménye:

6 liter fogyasztás 20 km-en; 8,5 liter 27 km-en; 3,5 liter 12 km-en és 11 liter 35 km-en.

Mekkora a k legvalószínűbb értéke? [$\Sigma(y-kx)^2=\min.$] Mekkora az eltérés a számtani középértéktől?

32. Föltesszük, hogy érvényes a $P\cdot V=k$ összefüggés. Kísérleti eredményeink P és V értékére (2, 4), (3, 2,8), (4, 1,9). Számítsuk ki k legvalószínűbb értékét annak feltételezésével, hogy $\left(P_1-\frac{k}{V_1}\right)^2+\left(P_2-\frac{k}{V_2}\right)^2+\left(P_3-\frac{k}{V_3}\right)^2$ a legkisebb. A számított k értéket hasonlítsuk össze az egyes mérési eredményekből számított k értékek számtani középértékével.

33. Elméleti meggondolások alapján kimutatható, hogy a hajó kormánylapátjának elforgató teljesítménye: $k\cdot\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi$, ahol φ a kormánylapátnak a hajó hossztengelyével bezárt szöge és k állandó (arányossági tényező). Mekkora φ szög esetén a legnagyobb a kormánylapát elforgató teljesítménye?

34. Egy háromszög a alapja és a szemben fekvő α szög állandó. Keressük meg a másik két oldalt, midőn a

a) terület maximum;

b) kerület maximum.

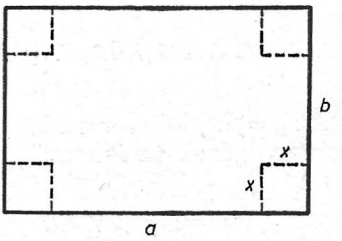
(Válasszuk független változónak az egyik szöget!)

35. Az $x^2+3y^2=28$ ellipszisnek adva van két pontja: (5, 1) és (−4, 2). Keressük meg az ellipszis egy harmadik pontjának koordinátáit úgy, hogy e pontok által meghatározott háromszög területe maximum legyen.

36. Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb térfogata 36 m³. Milyen méretek mellett lesz a teljes felszíne minimum?

37. Az $ABCD$ téglalap $\overline{BC}$ oldalát P-ben és a meghosszabbított $\overline{DC}$ oldalt Q-ban metszi az $\overline{APQ}$ egyenes. Határozzuk meg a P pont helyét úgy, hogy az ABP $\triangle$ és CPQ $\triangle$ területeinek összege minimum legyen.

38. Az $\overline{AB}$ és $\overline{AC}$ állandó hosszúságú egyenesek által bezárt szög állandó. A-n keresztül húzzunk egy egyenest úgy, hogy az $\overline{AB}$ és $\overline{AC}$ távolságok ezen egyenesen levő merőleges vetületeinek összege minimum legyen.



34. ábra.

39. Valamely egyenes körkúp térfogata adott. Határozzuk meg az alapkör sugarának és a magasságának az arányát, ha a

a) palástfelszín minimum;
b) teljes felszín minimum.

40. Mély vízben a λ hosszúságú hullám terjedési sebessége

$$v=\sqrt{\frac{\lambda}{a}+\frac{a}{\lambda}},$$

ahol a ismert állandó. Mekkora a hullámhossz a minimális terjedési sebesség esetén?

41. Adott oldalú téglalap sarkaiból mekkora oldalú négyzeteket kell kivágni, hogy a fennmaradó részt dobozzá hajtogatva, annak térfogata a lehető legnagyobb legyen. (Lásd 34. ábra.)

42. Feltételezve, hogy egy Volta-elem kapocsfeszültsége

$$U=\frac{E^2R}{(r+R)^2},$$

ahol E = állandó elektromotoros erő,
r = állandó belső ellenállás,
R = külső ellenállás,
mutassuk meg, hogy U maximális, ha $r=R$.

43. Valamely α hajlásszögű lejtőn a súrlódási tényező $\operatorname{tg}\varphi$ = állandó. Vízszintes irányban ható állandó erővel tolunk fel valamely terhet. Mekkora α szög esetén lesz az $N=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)}$ teljesítmény maximális?

44. Az $I=I_0\cdot\sin(\omega t-\varphi)$ váltakozó áram egy L önindukció-tényezőjű vasmagos tekercset jár át. Az indukált elektromos erő: $E=L\dfrac{dI}{dt}$. Mely időpillanatban lesz ez az elektromos erő a legnagyobb?

45. Valamely m-szer megismételt gondos mérés eredményei

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,$$

Ezeknek a mért adatoknak a pontos értéktől való eltérései, az egyes mérések elkövetett hibái:

$$x-a_1,\ x-a_2,\ \ldots,\ x-a_n,$$

Feltehetőleg a pontos x érték legvalószínűbb értéke esetén e hibák négyzetösszege minimum, azaz

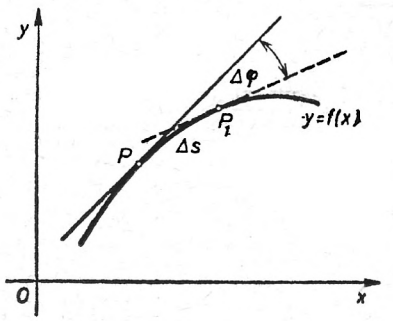
$$(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\ldots+(x-a_n)^2=minimum.$$

Mutassuk ki, hogy a „*legkisebb négyzetek módszere*" a mért adatok számtani középértékét adja eredményül.

9. §. GÖRBÜLET, GÖRBÜLETI KÖR, EVOLUTA, EVOLVENS

a) **Görbület**

Az $y=f(x)$ kétszer differenciálható függvény P pontbeli görbületén az érintő irányszögének az ívhosszhoz viszonyított változási sebességét értjük. (L. 35. ábra.)



35. ábra.

Az átlaggörbület:

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| \approx \left|\frac{\Delta\varphi}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right|.$$

A görbület:

$$g=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|.$$

Mivel $\operatorname{tg}\varphi=y'$, azaz $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\,y'$

és $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$, ezért

$$g=\left|\frac{d\varphi}{ds}\right| = \left|\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}\right| = \left|\frac{\frac{y''}{1+y'^2}}{\sqrt{1+y'^2}}\right| = \left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|.$$

b) **Görbületi kör**

A görbület reciprok értéke adja a *görbületi sugarat* (simuló kör sugarát):

$$R=\frac{1}{g}=\left|\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\right|.$$

A *simuló kör* másodrendűen érintkezik az adott görbével.

Ha a görbe P_0 pontjának koordinátái: x_0, y_0, és e helyen az első és második derivált értéke: y_0' és y_0'', akkor a simuló kör középpontjának (a görbületi középpontnak) koordinátái:

$$x=x_0-y_0'\frac{1+y_0'^2}{y_0''},\qquad y=y_0+\frac{1+y_0'^2}{y_0''}.$$

c) Evoluta, evolvens A folytonos görbületű L görbe görbületi középpontjainak L' mértani helyét az L görbe *evolutájának*, míg magát az L görbét az L' evoluta *evolvensének* nevezzük.

Példák:

a)

1. Határozzuk meg a görbületét valamely

$$\left.\begin{aligned} x&=\psi(t)\\ y&=\varphi(t)\end{aligned}\right\}$$

paraméteres egyenletrendszerrel megadott görbének.

A paraméteresen megadott függvény differenciálási szabálya szerint:

$$y'=\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}=\frac{\dot y}{\dot x}$$

és

$$y''=\frac{\varphi''(t)\cdot\psi'(t)-\psi''(t)\cdot\varphi'(t)}{[\psi'(t)]^3}=\frac{\ddot y\cdot\dot x-\ddot x\cdot\dot y}{\dot x^3}.$$

Így

$$g=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|=\left|\frac{\ddot y\cdot\dot x-\ddot x\cdot\dot y}{\dot x^3\left(\frac{\dot y^2+\dot x}{\dot x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right|=\left|\frac{\ddot y\cdot\dot x-\ddot x\cdot\dot y}{(\dot x^2+\dot y^2)^{\frac{3}{2}}}\right|.$$

2. Határozzuk meg a görbület képletét az

$$r=r(\varphi)$$

polárkoordinátákkal megadott görbe esetében.

A polárkoordináták és derékszögű koordináták összefüggései:

$$x=r\cdot\cos\varphi,\quad y=r\cdot\sin\varphi.$$

Ebből, paraméterül φ-t választva

$$\dot x=r'\cos\varphi-r\sin\varphi,\quad \ddot x=r''\cos\varphi-2r'\sin\varphi-r\cos\varphi,$$
$$\dot y=r'\sin\varphi+r\cos\varphi,\quad \ddot y=r''\sin\varphi+2r'\cos\varphi-r\sin\varphi.$$

Ezekkel

$$g=\left|\frac{(r''\sin\varphi+2r'\cos\varphi-r\sin\varphi)(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)-(r''\cos\varphi-2r'\sin\varphi-r\cos\varphi)(r'\sin\varphi+r\cos\varphi)}{[(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)^2+(r'\sin\varphi+r\cos\varphi)^2]^{3/2}}\right|=$$
$$=\left|\frac{r^2+2r'^2-r\,r''}{(r^2+r'^2)^{3/2}}\right|.$$

b)

1. Határozzuk meg a görbületi középpont koordinátáit paraméteres egyenletrendszerrel megadott görbe esetében.

$y=f(x)$ egyenlettel megadott görbe esetében a görbületi középpont koordinátái:

$$\xi=x-y'\,\frac{1+y'^2}{y''},\qquad \eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}.$$

Mivel paraméteresen megadott görbe esetében:

$$y'=\frac{\dot y}{\dot x} \quad \text{és} \quad y''=\frac{\ddot y\dot x-\ddot x\dot y}{\dot x^3},$$

azért

$$\xi=x-\frac{\dot y}{\dot x}\,\frac{1+\frac{\dot y^2}{\dot x^2}}{\frac{\ddot y\dot x-\ddot x\dot y}{\dot x^3}}=x-\dot y\,\frac{x^2+\dot y^2}{\ddot y\dot x-\ddot x\dot y};$$

$$\eta=y+\frac{1+\frac{\dot y^2}{\dot x^2}}{\frac{\ddot y\dot x-\ddot x\dot y}{\dot x^3}}=y+\dot x\,\frac{\dot x^2+\dot y^2}{\ddot y\dot x-\ddot x\dot y}.$$

Megjegyzés: A $\xi(t)$ és $\eta(t)$ függvények egyben az $x(t)$, $y(t)$ görbe *evolutájának* paraméteres előállítását adják.

2. Szerkesszük meg az $y=x^2$ parabola simuló körét az $x=0$ és $x=\frac{1}{2}$ helyen.

$$y=x^2;\quad [y]_{x=0}=0;\quad [y]_{x=\frac12}=\frac14;$$

$$y'=2x;\quad [y']_{x=0}=0;\quad [y']_{x=\frac12}=1;$$

$$y''=2;\quad [y'']_{x=0}=2;\quad [y'']_{x=\frac12}=2.$$

$$[R]_{x=0}=\left|\frac{(1+0)^{\frac32}}{2}\right|=\frac12;\qquad [R]_{x=\frac12}=\left|\frac{(1+1)^{\frac32}}{2}\right|=\left|\sqrt2\right|\approx 1{,}41.$$

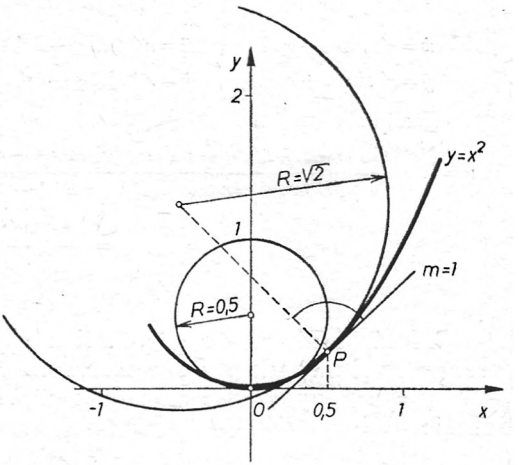
A görbületi sugár egy tetszés szerinti x helyen:

$$R=\left|\frac{(1+4x^2)^{\frac32}}{2}\right|.$$

3. Határozzuk meg az $r=c\varphi$ archimedesi spirális görbületi sugarát a $\varphi=0$-hoz tartozó pontjában.

Polárkoordinátás görbe esetén

$$R=\left|\frac{(r^2+r'^2)^{\frac32}}{r^2+2r'^2-rr''}\right|.$$



36. ábra.

A mi esetünkben: $r=c\varphi$,

$$r'=c,$$

$$r''=0.$$

Így

$$R=\left|\frac{(c^2\varphi^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}{c^2\varphi^2+2c^2}\right|.$$

Tehát a $\varphi=0$ érték behelyettesítésével:

$$R_{\varphi=0}=\left|\frac{c^3}{2c^2}\right|=\left|\frac{c}{2}\right|.$$

*

Az alábbi görbék adott pontjában számítsuk ki a görbületi sugarat és a simuló kör középpontjának koordinátáit.

4. $y=\frac{x^2}{2}$; $x=1$.

5. $y=x^3-1$; $x=1$.

6. $6y=x^3-12x-2$; $(2, -3)$.

7. $x^2-6y^2=12$; $(4, 1)$.

8. $y^2=10x-6$; $(1, 2)$.

9. $y^2=8-4x$; $(1,2)$.

10. $x^2+4y^2-10x=0$; $(2, 2)$.

11. $x^2-4y^2+6x=0$; $(2, 2)$.

12. $y^2=x^3-4x^2+4x$; $(1, 1)$.

13. $y^2=x^3+8$; $(-2, 0)$.

14. $y=\cos(x-1)$; $(1, 1)$.

15. $x^2-2xy+2y^2+x=0$; $(-1,0)$.

16. $x=3t$, $y=2t^2-1$; $t=1$.

17. $x=4t$, $y=\frac{2}{t}$; $t=1$.

18. $x=t^2-2$; $y=t-1$ $t=1$.

19. $x=2t$, $y=2t^2-1$; $t=1$.

20. $x=t^2-2t-3$, $y=t^3-4t-4$; $t=2$.

21. $x=t^2$, $y=t^3-4t$; $t=-1$.

22. $x=4\sin t$, $y=2\cos t$; $x=0$.

23. $x=2\cos t$, $y=\cos 2t$; $t=\frac{\pi}{2}$.

24. $y=e^x$, az y tengellyel való metszéspontban.

25. $y=e^{-x^2}$, az y tengellyel való metszéspontban.

26. $y=x^4-4x^3-18x^2$, az origóban.

27. $x^3+xy^2-6y^2=0$; $(3, 3)$.

28. $x^2+2y^2-2xy-x=0$; $(1, 0)$.

29. $y^2(x-4m)=x(x-3m)$; $x=0$ és $x=3m$.

30. $e^x=\sin y$; $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

31. $xy=\frac{a^2}{2}$; (x, y).

32. Keressük meg azt a pontot, ahol $y=\ln x$ görbülete a legnagyobb

33. $y=\sin x$ görbületének hol van szélsőértéke?

34. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, $(a>b)$ görbületének szélsőértéke.

35. $y=x^3$ görbületének szélsőértéke.

36. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=1$ görbületének szélsőértéke.

37. $y=ax^2+bx+c$ görbületének szélsőértéke.

38. $y=x^2-4x+2$ görbületének szélsőértéke.

Az alábbi görbéknek adott pontjában számítsuk ki a görbületi kör középpontjának koordinátáit, és igazoljuk, hogy e pont rajta van a görbe adott pontbeli normálisán:

39. $y=x^2-6x+10$; (3,1).

40. $3y=x^3-3x^2-9x$; (3, -9).

41. $y=x^3-6x^2+11x-6$; (1, 0).

42. $xy=30$; (3, 10).

43. $y=e^x$; (0,1).

44. $y=\sin x$; $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

45. $y=x^3-6x+4$; (2, 0).

46. $x^3+y^3-4xy=0$; (2, 2).

47. $y=\frac{x^2+4}{x}$; (2,4).

48. $y=x^2+\frac{8}{x}$; (2,8).

49. $y^2-4x-4y+4=0$; (0, 2).

50. $y^2-x-2y=0$; (0,2).

51. $x^2+2y^2-4x=2$; (0, 1).

52. $2x^2-y^2+3x+1=0$; (0,1).

53. $y^2=4(x^2-8x+17)$; (4,2).

54. $y^3=8x^2-x^3$; (4, 4).

55. $x^2+2xy+2y^2=10$; (2, 1).

56. $x^3+xy^2-6y^2=0$; (3, 3).

c)

1. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis evolutájának egyenletét.

Kifejezzük y-t a $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ egyenletből

$$y=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Képezzük az első és második deriváltat:

$$y'=-\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$y''=-\frac{ab}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ezekkel:

$$\xi=x-\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\frac{1+\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^2}{a^2-x^2}}{\frac{ab}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}}=\frac{a^2-b^2}{a^4}x^3;$$

$$\eta=y-\frac{1+\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^2}{a^2-x^2}}{\frac{ab}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}}=y-\frac{1+\frac{b^4}{a^4}\cdot\frac{x^2}{y^2}}{\frac{ab}{\frac{a^3}{b^3}\cdot y^3}}=$$

$$=y-\frac{a^2y^3}{b^4}-\frac{yx^2}{a^2}=y-\frac{a^2}{b^4}y^3-y\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)=\frac{b^2-a^2}{b^4}y^3.$$

Azaz $$\xi=\frac{a^2-b^2}{a^4}x^3; \qquad \eta=\frac{b^2-a^2}{b^4}y^3;$$

Fejezzük ki $\frac{x^2}{a^2}$ és $\frac{y^2}{b^2}$ értékét:

$$\frac{x^2}{a^2}=\left(\frac{a}{a^2-b^2}\xi\right)^{\frac{2}{3}}; \qquad \frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{b}{b^2-a^2}\eta\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{b}{a^2-b^2}\eta\right)^{\frac{2}{3}}.$$

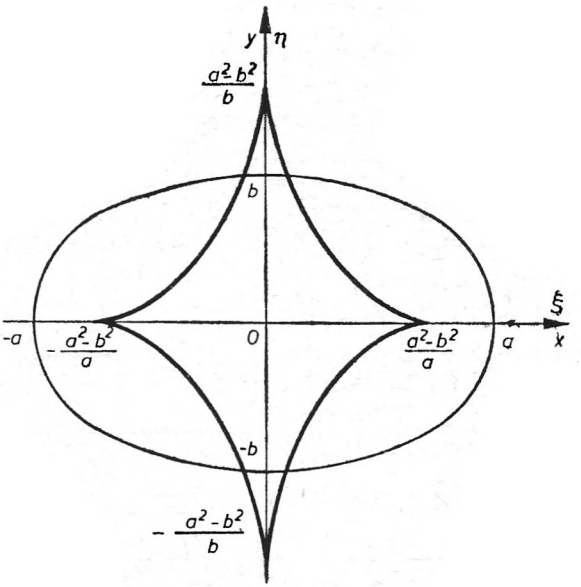
Azaz, figyelemmel az ellipszis egyenletére:

$$\left(\frac{a}{a^2-b^2}\xi\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{b}{a^2-b^2}\eta\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

Vagy

$$\left(\frac{\xi}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\eta}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

(A görbe egy *nyújtott asztroid.*) (L. 37. ábra.)



37. ábra.

2. Határozzuk meg a *ciklois* evolutáját.

A ciklois paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{aligned} x&=a(t-\sin t)\\ y&=a(1-\cos t)\end{aligned}\right\}.$$

Kiszámítjuk a paraméter szerinti első és második deriváltakat:

$$\dot{x}=a(1-\cos t); \qquad \ddot{x}=a\sin t,$$
$$\dot{y}=a\sin t; \qquad \ddot{y}=a\cos t.$$

Ezekkel:

$$\xi = a(t - \sin t) - a \sin t \frac{a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)}{a^2(\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t)} = a(t + \sin t);$$

$$\eta = a(1 - \cos t) + a(1 - \cos t) \frac{a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)}{a^2(\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t)} =$$

$$= a(-1 + \cos t).$$

Vezessük be új paraméternek a $\tau = t - \pi$ paramétert. Ekkor

$$\xi = a(\pi + \tau - \sin \tau),$$
$$\eta = a(-1 - \cos \tau),$$

vagy

$$\xi' = \tau - a\pi = a(\tau - \sin \tau),$$
$$\eta' = \eta + 2a = a(1 - \cos \tau).$$

Ebből látható, hogy a ciklois evolutája az eredeti cikloissal egybevágó, csak ahhoz képest az x tengely irányában $a\pi$ egységgel pozitív irányban és az y-tengely irányában $2a$ egységgel negatív irányban van eltolva.

3. Igazoljuk, hogy a *körevolvens* evolutája kör.

A körevolvens paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{aligned} x &= R(\cos t + t \sin t) \\ y &= R(\sin t - t \cos t) \end{aligned}\right\}.$$

A paraméter szerinti deriváltak:

$$\dot{x} = R(-\sin t + \sin t + \cos t) = Rt \cos t; \qquad \ddot{x} = R(\cos t - t \sin t);$$
$$\dot{y} = R(\cos t - \cos t + t \sin t) = Rt \sin t; \qquad \ddot{y} = R(\sin t + t \cos t).$$

Ezekkel:

$$\xi = R(\cos t + t \sin t) -$$
$$- Rt \sin t \frac{R^2t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}{R^2t(\sin t \cos t + t \cos^2 t - \sin t \cos t + t \sin^2 t)} = R \cos t;$$

$$\eta = R(\sin t - t \cos t) +$$
$$+ Rt \cos t \frac{R^2t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}{R^2t(\sin t \cos t + t \cos^2 t - \sin t \cos t + t \sin^2 t)} = R \sin t.$$

Azaz $\xi = R \cos t$ és $\eta = R \sin t$.

Innen pedig $\xi^2 + \eta^2 = R^2$, amint állítottuk.

*

Határozzuk meg az alábbi görbék evolutájának egyenletét:

4. $x = 2t$, $y = 2t^2 - 1$.

5. $x = 2t$, $y = \frac{t^3}{3}$.

6. $x = 3 - 2t$, $y = t^3 - 3$.

7. $x = 2t + 1$, $y = \frac{t^3}{3}$.

8. $x=4t,\ y=\dfrac{2}{t}$.

9. $x=2t,\ y=4-4t^2$.

10. $x=t^3-2t,\ y=t^2$.

11. $x=3t^2-1,\ y=1-2t$.

12. $x=4t+t^2,\ y=2t^2$.

13. $x=2-t,\ y=9-t^2$.

14. $x=1-t^2,\ y=5-t$.

15. $x=t+2,\ y=t^2-2t-15$.

16. $x=\sin t,\ y=t$.

17. $x=13\sin t,\ y=5\cos t$.

18. $\left.\begin{aligned} x&=4(t-\sin t)\\ y&=4(1-\cos t)\end{aligned}\right\}$.

19. $\left.\begin{aligned} x&=2\cos t+\cos 2t\\ y&=2\sin t+\sin 2t\end{aligned}\right\}$.

20. $x=3\cos t+\cos 3t,\ y=3\sin t+\sin 3t$.

21. $x=\dfrac{1}{\cos^3 t},\ y=\operatorname{tg}^3 t$.

22. $x=\dfrac{3}{\sin t},\ y=4\operatorname{ctg} t$.

23. $x=\cos^4 t,\ y=\sin^4 t$.

24. $x=2-\cos t,\ y=t-\sin t$.

25. $x=t-\cos t,\ y=t-\sin t$.

10. §. VÉGES NÖVEKMÉNYEK, DIFFERENCIÁLOK

a) Véges növekmények tétele

Ha az $y=f(x)$ függvény differenciálható, akkor

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\Delta x,$$

ahol $\varepsilon(\Delta x)\to 0$, ha $\Delta x\to 0$.

Azaz ,,kicsinyben, jó közelítéssel'':

$$\boxed{\Delta y\approx f'(x_0)\Delta x}$$ *(véges növekmények tétele),*

vagy $\boxed{dy=f'(x_0)dx}$ *(függvény és független változó differenciálja közti összefüggés).*

A független változó ,,kicsiny'' megváltozásához tartozó függvényérték megváltozás a véges növekmények tétele segítségével határozható meg első közelítésben.

b) Differenciálok

A változók differenciáljai a *differenciálegyenletek* építőkövei. A differenciálegyenletekkel igen gyakran olyan alakban találkozunk, hogy abban a változók differenciáljai közti összefüggés szerepel.

A differenciálási szabályok ismeretében adott függvény első, második, ..., *n-edik differenciálját* is meghatározhatjuk.

P é l d á k :

1. Számítsuk ki az $x=1$-től kevéssé különböző számok köbét.

$$y=f(x)=x^3. \qquad y'=f'(x)=3x^2.$$

$$f(1)=1. \qquad f'(1)=3.$$

A véges növekmények tétele szerint

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x=3x_0^2\cdot\Delta x.$$

A mi esetünkben:

$$\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1) \approx 3 \cdot \Delta x.$$

Innen pedig $$f(1+\Delta x) \approx 1 + 3 \cdot \Delta x.$$

Ha $\Delta x = 0{,}005$, akkor

$$(1{,}005)^3 \approx 1 + 3 \cdot 0{,}005 = 1{,}015.$$

Ha $\Delta x = -0{,}01$, akkor

$$(0{,}99)^3 \approx 1 + 3 \cdot (-0{,}01) = 0{,}97.$$

2. Számítsuk ki sin 31° értékét a véges növekmények tétele alapján.

Mivel $y = \sin x$, és $y' = \cos x$,

$$\Delta y \approx \cos x \cdot \Delta x.$$

Lesz

$$\sin(x+\Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x.$$

A mi esetünkben $x = 30° = \frac{\pi}{6}$ és

$$\Delta x = 1° = \frac{\pi}{180} = 0{,}01745.$$

Mivel $\sin 30° = 0{,}5$ és $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, azért

$$\sin 31° \approx 0{,}5 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}01745 \approx 0{,}5151.$$

(A pontos érték ötjegyű táblázatból: $\sin 31° = 0{,}51504$.)

3. Hány cm³-rel kell növelni egy $V = 1000$ liter térfogatú gömb sugarát (r), hogy a térfogat 1, 5, illetve 10 literrel növekedjék?

A gömb térfogata és sugara közti összefüggés:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

(Ha r értékét dm-ben mérjük, V értékét l-ben kapjuk.)

Adott térfogatváltozásokhoz tartozó sugárváltozásokat kell meghatároznunk. Tehát V a független változó, r a függő változó:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \sqrt[3]{V} = 0{,}62 \sqrt[3]{V}.$$

Ha r értékét közvetlenül cm-ben akajuk megkapni, 10-zel kell szoroznunk:

$$r = 6{,}2 \sqrt[3]{V}.$$

A $V = 1000$ l-hez tartozik $r = 62$ cm.

A véges növekmények tétele szerint:

$$\Delta r \approx \left[\frac{dr}{dV}\right]_{V=1000} \cdot \Delta V.$$

$$\frac{dr}{dV} = 6{,}2 \cdot \frac{1}{3} \cdot V^{-\frac{2}{3}} = \frac{2{,}06}{\sqrt[3]{(V)^2}}; \qquad \left[\frac{dr}{dV}\right]_{V=1000} = \frac{2{,}06}{100} = 0{,}0206.$$

Tehát $\Delta r \approx 0{,}0206 \cdot \Delta V.$

Ha $\Delta V = 1;\ 5;\ 10,$

akkor $\Delta r \approx 0{,}02;\ 0{,}1;\ 0{,}2.$

A 62 cm-es sugarat tehát 62,02 cm-re, 62,1 cm-re, illetve 62,2 cm-re kell növelnünk.

4. Egy négyzet alapú hasáb méreteit úgy változtatjuk, hogy térfogata mindig 1 dm³ maradjon. Ha az alapél $a = 0{,}5$ dm, a magasság $m = 4$ dm, kérdés, hogy az alapél 0,5 dm-es hosszának kismértékben való megváltoztatása a magasságnak milyen változását vonja maga után?

A hasáb térfogata:

$$a^2 \cdot m = 1.$$

Innen

$$m = \frac{1}{a^2}.$$

$$\frac{dm}{da} = -\frac{2}{a^3}; \qquad \left[\frac{dm}{da}\right]_{a=0,5} = -16.$$

A véges növekmények tétele szerint:

$$\Delta m \approx -16 \cdot \Delta a.$$

A negatív előjel arra utal, hogy az alapél növekedése a magasság csökkenését vonja maga után. Mégpedig (az $a = 0{,}5$, $m = 4$ értékkel meghatározott helyzet környezetében) m csökkenése kis változások esetében megközelítőleg 16-szor akkora, mint a növekedése.

5. Közvetlen méréssel meghatározzuk a kör sugarát. Tegyük fel, hogy a mérési hiba $|\Delta r| < \delta$. Kérdés, hogy a mérési adattal számított körterületérték relatív hibája hányszorosa a sugár mérési hibájának?

A kör területe: $t = r^2\pi.$

A véges növekmények tétele szerint, mivel

$$\frac{dt}{dr} = 2r\pi, \qquad \Delta t \approx 2r\pi \cdot \Delta r.$$

A mérési hiba relatív értéke:

$$\frac{|\Delta t|}{r} < \frac{\delta}{r}.$$

A területérték relatív hibája:

$$\frac{|\Delta t|}{t} \approx \frac{2r\pi}{r^2\pi} \cdot |\Delta r| = 2\frac{|\Delta r|}{r} < 2\frac{\delta}{r}.$$

Tehát a területszámítás relatív hibája 2-szer nagyobb, mint a mérési hiba.

*

α) Írjuk össze az ismert elemi függvények differenciáljainak kifejezéseit.

1. $y = x^n$. Mivel $y' = n \cdot x^{n-1}$, $dy = n \cdot x^{n-1} \cdot dx$.

2. $y = \sin x$. Mivel $y' = \cos x$, $dy = \cos x \cdot dx$.

3. $y = \cos x$. Mivel $y' = -\sin x$, $dy = -\sin x \cdot dx$.

4. $y = \operatorname{tg} x$. Mivel $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$,

$$dy = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot dx.$$

5. $y = \operatorname{ctg} x$. Mivel $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$,

$$dy = -\frac{dx}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x) \cdot dx.$$

6. $y = e^x$. Mivel $y' = e^x$, $dy = e^x \cdot dx$.

7. $y = a^x$. Mivel $y' = a^x \cdot \ln a$, $dy = a^x \cdot \ln a \cdot dx$.

8. $y = \operatorname{sh} x$. Mivel $y' = \operatorname{ch} x$, $dy = \operatorname{ch} x \cdot dx$.

9. $y = \operatorname{ch} x$. Mivel $y' = \operatorname{sh} x$, $dy = \operatorname{sh} x \cdot dx$.

10. $y = \operatorname{th} x$. Mivel $y' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$,

$$dy = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = (1 - \operatorname{th}^2 x) \cdot dx.$$

11. $y = \operatorname{cth} x$. Mivel $y' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1 - \operatorname{cth}^2 x$,

$$dy = -\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = (1 - \operatorname{cth}^2 x) \cdot dx.$$

12. $y = \ln x$. Mivel $y' = \dfrac{1}{x}$, $dy = \dfrac{dx}{x}$.

13. $y = {}^a\log x$. Mivel $y' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, $dy = \dfrac{dx}{x \cdot \ln a}$.

14. $y=\arcsin x$. Mivel $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $dy=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

15. $y=\arccos x$. Mivel $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $dy=-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

16. $y=\operatorname{arc\,tg} x$. Mivel $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$, $dy=\dfrac{dx}{1+x^2}$.

17. $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ Mivel $y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$, $dy=-\dfrac{dx}{1+x^2}$.

18. $y=\operatorname{ar\,sh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. Mivel $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $dy=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

19. $y=\operatorname{ar\,ch} x=\ln(x\pm\sqrt{x^2-1})$. Mivel $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $dy=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

20. $y=\operatorname{ar\,th} x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$. Mivel $y'=\dfrac{1}{1-x^2}$, $dy=\dfrac{dx}{1-x^2}$.
(Ahol $|x|<1$.)

21. $y=\operatorname{ar\,cth} x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$. Mivel $y'=\dfrac{1}{1-x^2}$; $dy=\dfrac{dx}{1-x^2}$.
(Ahol $|x|>1$.)

22. $y=u(x)\pm v(x)$. Mivel $y'=u'\pm v'$, $dy=u'dx\pm v'dx=du\pm dv$.

23. $y=u\cdot v$. Mivel $y'=u'v+v'u$, $dy=vdu+udv$.

24. $y=\dfrac{u}{v}$. Mivel $y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$, $dy=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$.

25. $y=f[u(x)]$. Mivel $y'=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$, $dy=\dfrac{dy}{du}\cdot du=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}\cdot dx$.

β) Határozzuk meg az $y=f(x)=x^{\frac{5}{2}}$ függvény magasabbrendű differenciáljait.

$$dy=f'(x)\cdot dx=\frac{5}{2}\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot dx,$$

$$d^2y=f''(x)\cdot dx^2=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot dx^2,$$

$$d^3y=f'''(x)\cdot dx^3=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot dx^3,$$

$$dy^4=f^{(4)}(x)\cdot dx^4=-\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}\cdot dx^4,$$

. . . . . .

$$d^ny=f^{(n)}(x)\cdot dx^n=\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-1\right)\left(\frac{5}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{5}{2}-n+1\right)\cdot x^{\frac{5}{2}-n}\cdot dx^n.$$

MEGOLDÁSOK

ELSŐ RÉSZ

A DIFFERENCIAHÁNYADOS FOGALMA, SZÁMÍTÁSA ÉS ALKALMAZÁSAI

1.§. A DIFFERENCIAHÁNYADOS ÉS DIFFERENCIÁLHÁNYADOS FOGALMA

a) **Differenciahányados és differenciálhányados***

3. 6,62; 6,0602; 6,006002.
4. −0,239; −0,249; −0,2499.
5. 6; 5,82; 5,802.
6. 14,104; 11,923.
7. 26; 25; 22,5; 20,5.
8. −0,44; −0,7; −0,88.
9. −0,2466; −0,5433; −0,664.
10. −0,48; −0,498; −0,4998.
11. 1,15; 1,153.
12. 0.
13. 2,857.
14. −0,07; −0,0625; −0,0625.
15. −0,587.
16. 3,055; 3,885; 3,988.
17. 0,94; 0,937.
18. 1,2.
19. 0,047.
20. 0,436.

b) **A derivált függvény. Jobb és bal oldali derivált**

4. $\frac{4}{3}$; $-\frac{4}{7}$.
5. 5; $-\frac{20}{9}$.
6. 0,072; −0,059.
7. $\pm 0{,}05$.
8. 0,005; −0,00495.
9. $y'_+ = 2$; $y'_- = -0$.
10. $y'_+ = -1$; $y'_- = 2$.
11. $y'_+ = +1$; $y'_- = -1$.
12. $y'_+ = 0$; $y'_- = 3$.
13. $y'_+ = -1$; $y'_- = +1$.
14. $y'_+ = -1$; $y'_- = 0$.
15. $y'_+ = 0$; $y'_- = -1$.

2. §. A DIFFERENCIA- ÉS DIFFERENCIÁLHÁNYADOS GEOMETRIAI ÉS FIZIKAI JELENTÉSE. DIFFERENCIÁL. „VÉGES NÖVEKMÉNYEK" TÉTELE

b) **Fizikai példák és feladatok**

10. A feszültségváltozás egyenesen arányos az áramerősség megváltozásával. Az arányossági tényező: $R = áll.$ A feszültség—áramerősség függvény diagramja tg $\alpha = R$ iránytényezőjű egyenes.

11. $\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{dF}{dx} = -k$; az erő megváltozása egyenesen arányos a kitérés megváltozásával. A negatív előjel itt nem jelenti azt, hogy az egyik mennyiség növekedése a másik csökkenését vonja maga után, csupán az erő és a kitérés ellentétes irányára utal.

* Csak a differenciálhányadosok értékeit adtuk meg.

12. Állandó F erő nyomatékának megváltozása egyenesen arányos az erő karjának megváltozásával.

13. $\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}=v_0\gamma=\text{const.}$ A hőtágulás együtthatója jelenti az egységnyi térfogatú testnek ($v_0=1$) az egységnyi hőfokváltozáshoz tartozó relatív térfogatváltozását.

14. $\frac{\Delta E_k}{\Delta v}=mv+\frac{1}{2}m\,\Delta v$; $\frac{dE_k}{dv}=mv$. A kinetikus energia pillanatnyi relatív értékváltozása egyenesen arányos a (változó) sebességgel. Nagyobb sebességgel haladó m tömegű test kinetikus energiája nagyobb mértékben változik, mint a lassabban haladóé.

15. $\frac{\Delta T}{\Delta l}=\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\cdot\frac{1}{\sqrt{l+\Delta l}+\sqrt{l}}$; $\frac{dT}{dl}=\frac{\pi}{\sqrt{gl}}$. A lengésidő „lokális" relatív értékváltozása fordítottan arányos az inga (változó) hosszának négyzetgyökével.

16.	$s=33$;	$v=12$;	$a=-18$;	$v=0$ először, ha $t=2$.
17.	$s=116$;	$v=72$;	$a=6$;	$v=0$ először, ha $t=6$.
18.	$s=72$;	$v=15$;	$a=-12$;	$v=0$ először, ha $t=4$.
19.	$s=171$;	$v=12$;	$a=-18$;	$v=0$ először, ha $t=4$.
20.	$s=212$;	$v=84$;	$a=-30$;	$v=0$ először, ha $t=4$.
21.	$s=153$;	$v=24$;	$a=-30$;	$v=0$ először ha $t\approx 3{,}7$.
22.	$s=4{,}5$;	$v=3{,}75$;	$a=2{,}25$;	$v=0$ először, ha $t\approx 0{,}7937$.
23.	1. $s=0{,}7$; $v=1{,}6$; $a=1$; 2. $s=0{,}39$; $v=1{,}28$; $a=2$; $v=0$ először, ha $t\approx 1{,}835$.			
24.	$s=1$;	$v=3$;	$a=15$;	$v=0$, ha $t=0$.
25.	$s=2{,}3026$;	$v=0{,}6$;	$a=-0{,}16$;	$v=0$, ha $t=0$.
26.	$s=625$;	$v=4000$;	$a=27\,600$;	$v=0$, ha $t=0$.
27.	$s=0{,}4254$;	$v=-1{,}2783$;	$a=0{,}8229$;	$v=0$, ha $t=0{,}253$.
28.	$s=-0{,}338$;	$v=-0{,}926$;	$a=1{,}522$;	$v=0$, ha $t=1{,}52$.
29.	$s=0{,}994$;	$v=-2{,}539$;	$a=3{,}09$;	$v=0$, ha $t=2{,}355$.
30.	$s=2{,}49$;	$v=-1{,}56$;	$a=-3{,}62$;	$v=0$, ha $t=0{,}663$.
31.	$s=1{,}74$;	$v=-1{,}42$;	$a=-2{,}26$;	$v=0$, ha $t=1{,}25$.
32.	$s=2{,}836$;	$v=-3{,}299$;	$a=-9{,}872$;	$v=0$, ha $t=0{,}72$.
33.	$s=-0{,}679$;	$v=-0{,}449$;	$a=0{,}886$;	$v=0$, ha $t=1{,}375$.
34.	$s=-2{,}4$;	$v=0{,}17$;	$a=22{,}02$;	$v=0$, ha $t=0{,}99$.
35.	$s=-3$;	$v=0{,}76$;	$a=-7{,}3$;	$v=0$, ha $t=1{,}9$.
36.	$s=-2{,}57$;	$v=2{,}277$;	$a=1{,}16$;	$v=0$, ha $t=3{,}84$.
37.	$s=0{,}6065$;	$v=-0{,}3346$;	$a=0{,}1109$;	$v=0$, ha $t=3{,}86$.
38.	$s=2{,}16$;	$v=-1{,}061$;	$a=0{,}571$;	$v=0$, ha $t=-0{,}96$.
39.	$s=1{,}23$;	$v=-0{,}845$;	$a=0{,}2396$;	$v=0$, ha $t=2{,}4$.

f) **Geometriai példák és feladatok**

2. $m=-\frac{1}{4}$; $y=-\frac{1}{4}x+1$.

3. $m=+\frac{1}{4}$; $y=\frac{1}{4}x+1$.

$m=-\frac{1}{4}$; $y=-\frac{1}{4}x-1$.

4. $m=-\frac{2}{27}$; $y=-\frac{2}{27}x+\frac{1}{3}$.

5. $m=1$; $y=x+\frac{11}{4}$.

6. $m=\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{2}x$.

$m=-\frac{1}{2}$; $y=-\frac{1}{2}x$.

7. $m=24$; $y=24x-8$.

8. $m=6$; $y=6x-4$.

9. $m=-18{,}74$; $y=-18{,}74x+26{,}31$.

10. $m=20$; $y=20x-23$.

11. $m=-\frac{8}{9}$; $y=-\frac{8}{9}x+2$.

12. $m=-\frac{2}{3}$; $y=-\frac{2}{3}x+1$.

13. $m=-\frac{1}{2}$; $x=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$.

14. $m=\frac{2}{\sqrt{3}}$; $y=\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$m=-\frac{2}{\sqrt{3}}$; $y=-\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}$.

15. $m=-\frac{1}{16}$; $y=-\frac{1}{16}x+\frac{11}{16}$.

$m=\frac{1}{16}$; $y=\frac{1}{16}x-\frac{11}{16}$.

16. $m=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{5}{\sqrt{3}}$.

$m=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{5}{\sqrt{3}}$.

17. $m=4$; $y=4x-1$.

18. $m=\frac{15}{16}$; $y=\frac{15}{16}x+\frac{1}{2}$.

19. $m=\frac{6}{5}$; $y=\frac{6}{5}x+\frac{12}{5}$.

$m=\frac{4}{5}$; $y=\frac{4}{5}x-\frac{12}{5}$.

20. $m=0$; $y=0$.

21. $m=1$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 0; -1.

22. Vízszintes érintő: (3,3); (3,1).
Függőleges érintő: (4,2); (2,2).

23. $(-3,\ 4)$; $(3,\ -4)$.

24. $(3,\ -5)$; $(-3,\ 13)$.

25. a) $\left(3,\ \frac{5}{2}\right)$; $\left(2,\ \frac{5}{3}\right)$.

b) $\left(4,\ \frac{13}{3}\right)$; $\left(1,\ -\frac{1}{6}\right)$.

26. a) $\left(1,\ -\frac{1}{3}\right)$.

b) $\left(0,\ \frac{1}{3}\right)$; $(2,\ -1)$.

27. $x=4$.

28. $(4,\ 4)$; $(-4,\ -4)$.

29. $m_{x=1}=2$; $m_{x=2}=-1$; $m_{x=3}=2$.

30. a) $\left(3,\ -\frac{13}{2}\right)$; $\left(-2,\frac{58}{3}\right)$.

b) $x=4$; $x=-3$.

31. $x=0$; $x=\pm\sqrt{3}$.

32. a) $x=\pm 1$.

b) $x=\pm 2$.

33. $x=10$; $x=2$.

34. a) $x=2$; $x=-\frac{5}{3}$.

b) $x=1$; $x=-\frac{2}{3}$.

35. x tengellyel párhuzamos: $x=-2$.

y tengellyel párhuzamos: $y=3$.

36. $x=1$.

37. $x=1$.

38. a) $x=\dfrac{4k+1}{4}\pi$.

b) $x=2k\pi$; $x=\dfrac{4k-1}{2}\pi$.

39. 0; 1; 6; $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$.

40. $x=0$; $x=\pm\sqrt{\dfrac{32}{17}}$.

41. Párhuzamos $x=-2$; merőleges: $x=0$, $x=\dfrac{1}{2}$.

42. a) $y'=0$.
b) $y'=1$.

43. $x=k\pi$; $x=0{,}622+k\pi$; $x=k\pi-0{,}622$

44. $x=\dfrac{2k-1}{2}\pi$; $x=0{,}1675+2k\pi$; $x=2{,}9741+2k\pi$.

45. $x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$; $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$.

46. $x=\dfrac{2k-1}{2}\pi$; $x=k\pi$.

47. $x=k\dfrac{\pi}{2}$.

48. $(0,\ 0)$.

49. $\alpha=\pm\operatorname{arc\,tg}\dfrac{3}{4}\approx\pm 36{,}9°$.

50. $a=-45°$; $a=63{,}4°$.

51. $(2,2)$.

52. $(3,3)$ és $\left(\dfrac{20}{9},\ \dfrac{80}{27}\right)$

53. $(2,\ \sqrt{8})$.

54. $y=\dfrac{x^2}{2}$.

55. $y=\sin x$.

57. $\omega_1=\operatorname{arc\,tg}3=71{,}6°$; $\omega_2=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{3}{19}=8{,}95°$.

58. $\omega_1=\operatorname{arc\,tg}3$; $\omega_2=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{3}{19}$.

59. $\omega=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{8}{15}=28{,}1°$.

60. $\omega=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{8}{15}$.

61. $\omega_1=\operatorname{arc\,tg}2=63{,}5°$; $\omega_2=5{,}9°$; $\omega_3=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{6}{7}=40{,}55°$.

62. $\omega=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{8}{11}=35{,}75°$.

63. $\omega=\dfrac{\pi}{2}$.

64. $\omega=\dfrac{\pi}{4}$.

65. $\omega=\operatorname{arc\,tg}3=71{,}6°$.

66. $\omega=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{3}$;

érintők: $y=2x-2$; $y=x$;
$y=-2x-2$; $y=-x$.

Normálisok: $y=-\dfrac{1}{2}x+3$; $y=-x+4$;

$$y=\frac{1}{2}x+3;\quad y=x+4.$$

Szubtangensek: $s_t=1;\ s_t=2.$

Szubnormálisok: $s_n=4;\ s_n=2.$

67. $\omega=\operatorname{arc\,tg}\,3;$ érintők: $y=x;\ y=-2x+6;$

$y=-x;\ y=2x+6.$

Normálisok: $y=-x+4;\ y=\frac{1}{2}x+1;$

$y=x+4;\ y=-\frac{1}{2}x+1.$

Szubtangensek: $s_t=2;\ s_t=1.$

Szubnormálisok: $s_n=2;\ s_n=4.$

68. $\omega=\operatorname{arc\,tg}\,2=63{,}5°;$

érintők: $y=0;\ y=2x;$

$y=2x-2;\ y=2.$

Normálisok: $x=0;\ y=-\frac{1}{2}x;$

$y=-\frac{1}{2}x+3;\ x=2.$

Szubtangensek: $s_t=\infty;\quad s_t=0;$

$s_t=1;\quad s_t=\infty;$

Szubnormálisok: $s_n=0;\quad s_n=0;$

$s_n=4;\quad s_n=0.$

69. $\omega=\operatorname{arc\,tg}\,2;$ érintők: $y=2x-4;\ y=2;$

$y=0;\ y=2x-2.$

Normálisok: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2};\ x=3;$

$x=1;\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$

Szubtangensek: $s_t=1;\quad s_t=\infty;$

$s_t=\infty;\quad s_t=0.$

Szubnormálisok: $s_n=4;\quad s_n=0;$

$s_n=0;\quad s_n=0.$

70. $\omega=32{,}5°;$ érintők: $y=4x-12;\ y=-3x+9;$

$y=-3x-\frac{13}{4};\ y=4x+\frac{1}{4}.$

Normálisok: $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4};\ y=\frac{1}{3}x-1;$

$y=\frac{1}{3}x-\frac{19}{12};\ y=-\frac{1}{4}x-\frac{15}{8}.$

Szubtangensek: $s_t=0;\quad s_t=0;$

$s_t=\frac{7}{12};\quad s_t=\frac{7}{16}.$

Szubnormálisok: $s_n = 0$; $s_n = 0$;

$$s_n = \frac{21}{4}; \quad s_n = 7.$$

71. $\omega = 25{,}5°$; érintők: $y = 5x - 16$; $y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$.

Normálisok: $y = -\frac{1}{5}x + \frac{24}{5}$; $y = -\frac{3}{4}x + 7$.

Szubtangensek: $s_t = \frac{4}{5}$; $s_t = 3$.

Szubnormálisok: $s_n = 20$; $s_n = \frac{16}{3}$.

72. $\omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{6}$; $\omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3}$;

érintők: $y = \frac{13}{4}x - 8$; $y = 2x - 3$;

$$y = -\frac{7}{4}x - \frac{1}{2}; \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}.$$

Normálisok: $y = -\frac{4}{13}x + \frac{81}{13}$; $y = -\frac{1}{2}x + 7$;

$$y = \frac{4}{7}x + \frac{51}{28}; \quad y = 2x + \frac{13}{4}.$$

Szubtangensek: $s_t = \frac{20}{13}$; $s_t = \frac{5}{2}$;

$$s_t = \frac{5}{7}; \quad s_t = \frac{5}{2}.$$

Szubnormálisok: $s_n = \frac{65}{4}$; $s_n = 10$;

$$s_n = \frac{35}{16}; \quad s_n = \frac{5}{8}.$$

73. $\omega = \frac{\pi}{2}$; $\omega = 31°$; érintők: $y = 0$; $x = 0$;

$$y = x - 1; \quad y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Normálisok: $x = 0$; $y = 0$;

$$y = -x + 3; \quad y = -4x + 9.$$

Szubtangensek: $s_t = \infty$; $s_t = 0$;

$$s_t = 1; \quad s_t = 4.$$

Szubnormálisok: $s_n = 0$; $s_n = \infty$;

$$s_n = 1; \quad s_n = \frac{1}{4}.$$

74. $\omega=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{9}{4}$; $\omega=\operatorname{arc\,tg}\frac{46}{17}$;

érintők: $x=0$; $y=\frac{9}{4}x$;

$y=\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}$; $y=-\frac{7}{4}x+16$.

Normálisok: $y=0$; $y=-\frac{4}{9}x$;

$y=-6x+50$; $y=\frac{4}{7}x-\frac{18}{7}$.

Szubtangensek: $s_t=0$; $s_t=0$;

$s_t=12$; $s_t=\frac{8}{7}$.

Szubnormálisok: $s_n=\infty$; $s_n=0$;

$s_n=\frac{1}{3}$; $s_n=\frac{7}{2}$.

75. $\omega=\frac{\pi}{2}$; $\omega=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$; érintők: $y=0$; $x=0$;

$y=3x-8$; $y=x+8$.

Normálisok: $x=0$; $y=0$;

$y=-\frac{1}{3}x+\frac{56}{3}$; $y=-x+24$.

Szubtangensek: $s_t=\infty$; $s_t=0$;

$s_t=\frac{16}{3}$; $s_t=16$.

Szubnormálisok: $s_n=0$; $s_n=\infty$;

$s_n=48$; $s_n=16$.

76. $\omega=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}2$; $\omega=\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{7}$;

érintők: $x=0$; $y=-2x$;

$y=x+4$; $y=6x-16$.

Normálisok: $y=0$; $y=\frac{1}{2}x$;

$y=-x+12$; $y=-\frac{1}{6}x+\frac{26}{3}$.

Szubtangensek: $s_t=0$; $s_t=0$;

$s_t=8$; $s_t=\frac{4}{3}$.

Szubnormálisok: $s_n=\infty$; $s_n=0$;

$s_n=8$; $s_n=48$.

77. $\omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{4}$;

érintők: $y = -3x + 5$; $y = 3x - 1$.

Normálisok: $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$; $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$.

Szubtangensek: $s_t = \frac{2}{3}$; $s_t = \frac{2}{3}$.

Szubnormálisok: $s_n = 6$; $s_n = 6$.

78. $\omega = \frac{\pi}{4}$; $\omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{2}$; $\omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{19}$;

érintők: $y = 0$; $y = x$;

$y = \frac{3}{2}x - 2$; $y = 1$;

$y = 6x + 16$; $y = 3x + 4$.

Normálisok: $x = 0$; $y = -x$;

$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$; $x = 2$;

$y = -\frac{1}{6}x - \frac{26}{3}$; $y = -\frac{1}{3}x - \frac{28}{3}$.

Szubtangensek: $s_t = \infty$; $s_t = 0$;

$s_t = \frac{2}{3}$; $s_t = \infty$;

$s_t = \frac{4}{3}$; $s_t = \frac{8}{3}$.

Szubnormálisok: $s_n = 0$; $s_n = 0$;

$s_n = \frac{3}{2}$; $s_n = 0$;

$s_n = 48$; $s_n = 24$.

79. $\omega = \frac{\pi}{4}$;

érintők: $y = 3x - 4$; $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Normálisok: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$; $y = -2x + 6$.

Szubtangensek: $s_t = \frac{2}{3}$; $s_t = 4$.

Szubnormálisok: $s_n = 6$; $s_n = 1$.

80. $\omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{9}{13}$;

érintők: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$; $y = -3x + 10$.

Normálisok: $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$; $y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$.

Szubtangensek: $s_t = \frac{16}{3}$; $s_t = \frac{4}{3}$.

Szubnormálisok: $s_n = 3$; $s_n = 12$.

81. $\omega = \operatorname{arc\,tg}\, 3$;

érintők: $y = -x - 4$; $y = \frac{1}{2}x + 8$.

Normálisok: $y = x + 12$; $y = -2x - 12$.

Szubtangensek: $s_t = 4$; $s_t = 8$;

Szubnormálisok: $s_n = 4$; $s_n = 2$.

82. $\omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{7}{24}$;

érintők: $y = -\frac{3}{4}x + 6$; $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{3}$;

$y = -\frac{4}{3}x + 8$; $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$.

Normálisok: $y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$; $y = \frac{3}{4}x$;

$y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$; $y = \frac{4}{3}x$.

Szubtangensek: $s_t = 4$; $s_t = \frac{9}{4}$;

$s_t = 3$; $s_t = \frac{16}{3}$.

Szubnormálisok: $s_n = \frac{9}{4}$; $s_n = 4$;

$s_n = \frac{16}{3}$; $s_n = 3$.

83. $\omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{5}{27}$

érintők: $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$; $y = \frac{7}{3}x - \frac{4}{3}$;

Normálisok: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$; $y = -\frac{3}{7}x + \frac{10}{7}$.

Szubtangensek: $s_t = \frac{2}{3}$; $s_t = \frac{3}{7}$.

Szubnormálisok: $s_n = \frac{3}{2}$; $s_n = \frac{7}{3}$.

84. $\omega = \frac{\pi}{6}$;

érintők: $y = -5\sqrt{3}x + 17$; $y = \frac{4}{\sqrt{3}}x - 2$.

Normálisok: $y = \frac{1}{5\sqrt{3}}x + \frac{9}{5}$; $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{11}{4}$.

Szubtangensek: $s_t = \frac{2}{5\sqrt{3}}$; $s_t = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Szubnormálisok: $s_n = 10\sqrt{3}$; $s_n = \frac{8}{\sqrt{3}}$.

85. $\omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{8}{11}$;

érintők: $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$; $y = -\frac{1}{6}x + \frac{5}{2}$;

$y = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$; $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$.

Normálisok: $y=-2x-3$; $y=6x+21$;
$y=6x-31$; $y=-2x+9$.

Szubtangensek: $s_t=6$; $s_t=18$;
$s_t=6$; $s_t=2$.

Szubnormálisok: $s_n=\frac{3}{2}$; $s_n=\frac{1}{2}$;
$s_n=\frac{1}{6}$; $s_n=\frac{1}{2}$.

g) **Függvényérték-változás főrész és elenyésző rész összegeként**

4. $\Delta y=3\Delta x$.
5. $\Delta y=2\Delta x$.
6. $\Delta x=2t\,\Delta t+\Delta t\cdot\Delta t$.
7. $\Delta y=4t\,\Delta t+2\Delta t\cdot\Delta t$.
8. $\Delta y=6t^2\,\Delta t+(6t\,\Delta t+\Delta t^2)\Delta t$.
9. $\Delta y=(4t-1)\Delta t+2\Delta t\cdot\Delta t$.
10. $\Delta s=(6t+2)\Delta t+3\Delta t\cdot\Delta t$.
11. $\Delta y=(2x+7)\Delta x+\Delta x\cdot\Delta x$.
12. $\Delta y=(6x^2-4)\Delta x+(6x\,\Delta x+\Delta x^2)\Delta x$.
13. $\Delta y=(2-3t^2)\Delta t-(3t\,\Delta t+\Delta t^2)\Delta t$.
14. $\Delta y=(4t-3t^2)\Delta t+(2\Delta t-3t\,\Delta t-\Delta t^2)\Delta t$.
15. $\Delta y=(3t^2-5)\Delta t+(3t\,\Delta t+\Delta t^2)\Delta t$.
16. $\Delta y=-\frac{1}{x^2}\Delta x+\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x(x+\Delta x)}\right)\Delta x$.
17. $\Delta s=-\frac{1}{3t^2}\Delta t+\left(\frac{1}{3t^2}-\frac{1}{3t(t+\Delta t)}\right)\Delta t$.
18. $\Delta y=-\frac{2}{x^3}\Delta x+\left(\frac{2}{x^3}-\frac{2x+\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}\right)\Delta x$.
19. $\Delta y=-\frac{3}{(x+1)^2}\Delta x+\left(\frac{3}{(x+1)^2}-\frac{3}{(x+1)(x+\Delta x+1)}\right)\Delta x$.
20. $\Delta y=\frac{2}{(1-t)^2}\Delta t+\left(\frac{2}{(1-t)(1-t-\Delta t)}-\frac{2}{(1-t)^2}\right)\Delta t$.
21. $\Delta y=-\frac{6}{(2x-1)^2}\Delta x+\left(\frac{6}{(2x-1)^2}-\frac{6}{(2x-1)(2x+2\Delta x-1)}\right)\Delta x$.
22. $\Delta y=-\frac{6x}{(x^2-1)^2}\Delta x+\left(\frac{6x}{(x^2-1)^2}-\frac{6x+3\Delta x}{(x^2-1)[(x+\Delta x)^2-1]}\right)\Delta x$.
23. $\Delta x=-\frac{10}{(2t+1)^2}\Delta t+\left(\frac{10}{(2t+1)^2}-\frac{10}{(2t+1)(2t+2\Delta t+1)}\right)\Delta t$.
24. $\Delta y=\frac{8}{(3-2x)^2}\Delta x+\left(\frac{8}{(3-2x)(3-2x-2\Delta x)}-\frac{8}{(3-2x)^2}\right)\Delta x$.
25. $\Delta y=\frac{12}{(5-4x)^2}\Delta x+\left(\frac{12}{(5-4x)(5-4x-4\Delta x)}-\frac{12}{(5-4x)^2}\right)\Delta x$.
26. $\Delta y=\frac{4t}{(1-t^2)^2}\Delta t+\left(\frac{4t}{(1-t^2)^2}-\frac{4t-2\Delta t}{(1-t^2)[1-(t+\Delta t)^2]}\right)\Delta t$.

27. $\Delta s = -\frac{6t}{(1+t^2)^2}\Delta t + \left(\frac{6t}{(1+t^2)^2} - \frac{6t+3\Delta t}{(1+t^2)[1+(t+\Delta t)^2]}\right)\Delta t.$

28. $\Delta y = -\frac{1}{(3-x)^2}\Delta x + \left(\frac{1}{(3-x)^2} - \frac{1}{(3-x)(3-x-\Delta x)}\right)\Delta x.$

29. $\Delta y = -\frac{2x+2}{x^3}\Delta x + \left(\frac{2x+2}{x^3} - \frac{2x^2+2x+2x\Delta x+\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}\right)\Delta x.$

30. $\Delta y = \frac{2x^2+2x}{(2x+1)^2}\Delta x + \left(\frac{2x^2+2x}{(2x+1)^2} - \frac{2x^2+2x+2x\Delta x+\Delta x}{(2x+1)(2x+2\Delta x+1)}\right)\Delta x.$

31. $\Delta y = \frac{2x-3x^2}{(1-3x)^2}\Delta x + \left(\frac{2x-3x^2}{(1-3x)^2} - \frac{2x-3x^2-3x\Delta x+\Delta x}{(1-3x)(1-3x-3\Delta x)}\right)\Delta x.$

32. $\Delta s = \frac{5t^2-1}{2t^2}\Delta t + \left(\frac{5t^2-1}{2t^2} - \frac{5t^2-1+5t\Delta t}{2t(t+\Delta t)}\right)\Delta t.$

33. $\Delta x = 4\frac{y+y^2}{(1+2y)^2}\Delta y + \left(\frac{4y+4y^2}{(1+2y)^2} - \frac{4y+4y^2+2\Delta y+4y\Delta y}{(1+2y)(1+2y+2\Delta y)}\right)\Delta y.$

34. $\Delta y = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\Delta x + \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}\right)\Delta x.$

35. $\Delta y = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\Delta x + \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}} - \frac{3}{\sqrt{3x+3\Delta x+2}+\sqrt{3x+2}}\right)\Delta x.$

3. §. A DIFFERENCIÁLHÁNYADOS KISZÁMÍTÁSA. DIFFERENCIÁLÁSI SZABÁLYOK

b) Hatványfüggvények

β) Pozitív egészkitevős hatványfüggvények

3. $y' = 3x^2.$ **4.** $y' = 8x^3.$ **5.** $y' = 28x^6.$

6. $y' = 23x^{22}.$ **7.** $y' = 10x^9.$ **8.** $y' = 40x^7.$

9. $y' = x^3.$ **10.** $y' = \frac{2}{3}x^4.$ **11.** $y' = 3x^5.$

12. $y' = 36x^9.$ **13.** $y' = 0{,}3x^2.$ **14.** $y' = 56x^{27}.$

15. $y' = 4x^{31}.$

γ) Negatív egészkitevős hatványfüggvények

4. $y' = -\frac{3}{x^4}.$ **5.** $y' = -\frac{12}{x^5}.$ **6.** $y' = \frac{12}{x^7}.$

7. $y' = -\frac{11}{x^{12}}.$ **8.** $y' = -\frac{31}{x^{32}}.$ **9.** $y' = -\frac{1}{x^{11}}.$

10. $y' = -\frac{18}{x^7}.$ **11.** $y' = -\frac{10}{3x^6}.$ **12.** $y' = \frac{3}{2x^{10}}.$

13. $y' = \frac{6}{x^4}.$ **14.** $y' = -\frac{2}{x^5}.$ **15.** $y' = -\frac{120}{x^6}.$

d) **Exponenciális függvények**

γ) **1.** $y'_{x=0}=0{,}693$ $y'_{x=1}=1{,}386$

2. $y'_{x=1}=3{,}296$; $y'_{x=-1}=0{,}366$.

3. $y'=-1{,}386$. **4.** $y'=-1{,}099$.

5. $y'_{x=-1}=0{,}3679$; $y'_{x=0}=1$; $y'_{x=1}=2{,}7183$.

k) **Törtkitevős hatványfüggvények**

1. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. **2.** $y'=-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$.

3. $y'=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. **4.** $y'=-\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$.

5. $y'=-\dfrac{3}{4}x^{-\frac{5}{4}}$. **6.** $y'=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{5}{6}}$.

7. $y'=\dfrac{1}{15\sqrt[15]{x^{14}}}$. **8.** $y'=-\dfrac{1}{54}x^{-\frac{8}{9}}$.

9. $y'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}$.

l) **Gyakorlófeladatok az előző szabályok alkalmazására**

α) **Polinomok**

1. $y'=2x-2$. **2.** $y'=4x+1$.

3. $y'=3-2x$. **4.** $y'=6x^2-7$.

5. $y'=-1-4x$. **6.** $y'=6x^2+10x$.

7. $y'=6x-2$. **8.** $y'=x^2+3$.

9. $y'=x+2$. **10.** $y'=4x^3-4x$.

11. $y'=3x^2+x$. **12.** $y'=2x^3+1$.

13. $y'=x^2+4x$. **14.** $y'=6x-2x^3$.

15. $y'=3x^2+2x-1$. **16.** $y'=x^2-x$.

17. $y'=1-x^2+2x$. **18.** $y'=x^4+9x^2$.

19. $y'=6x^5-4x$. **20.** $y'=-18x^8$.

β) **Negatív és törtkitevős hatványfüggvények összege és különbsége**

1. $y'=x^{-\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{3}}$. **2.** $y'=3x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$.

3. $y'=-x^{-2}+\dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$. **4.** $s'=t^{-\frac{2}{3}}-\dfrac{5}{2}t^{\frac{3}{2}}$.

5. $r'=2t+\dfrac{1}{\sqrt{t}}+4t^{\frac{1}{3}}$ **6.** $y'=\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}+\dfrac{1}{6\sqrt{x}}$.

7. $R' = 1 - \frac{1}{\varphi^2} - \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$

8. $y' = 3x^2 - \frac{1}{9} x^{-\frac{4}{3}}$.

9. $y' = 6x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^3}$.

10. $y' = 8x^{\frac{5}{3}} - \frac{5}{4} x^{\frac{1}{4}}$.

11. $y' = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{2}{3\sqrt{x^2}}$.

12. $y' = -\frac{3}{2\sqrt{x^3}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}$.

13. $y' = -\frac{14}{x^3} - x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$.

14. $s' = -\frac{2}{\sqrt{t^3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{t^4}}$.

γ) Szorzat és törtfüggvények

1. $y' = \frac{5}{2}\sqrt{x^3} + \sqrt{3x}$.

2. $y' = 48x^7 + 105x^6 - 48x^2 - 80x$.

3. $y' = -3\sqrt{2t^5} + \frac{10}{\sqrt{2}}\sqrt{t^3} - \frac{15}{\sqrt{2}}\sqrt{t^5}$.

4. $y' = -9t^2 + 8t + 3$.

5. $y' = 12x^2 - 36x + 9$.

6. $y' = \frac{2x^2 + 6x + 2}{(1 - x^2)^2}$.

7. $y' = \frac{2}{(1-x)^2}$.

8. $y' = \frac{4x^2 + 4x + 3}{(1 + 2x)^2}$.

9. $y' = \frac{3t^2 - 2t}{(3t - 1)^2}$.

10. $y' = 3\sqrt{x} - \frac{32}{3} x^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2\sqrt{x}} - 4x^{-\frac{2}{3}}$.

11. $y' = -15x^{-2} + 2x^{-\frac{5}{3}} + \frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}} - 30x + 39x^{\frac{10}{3}} - \frac{21}{2} x^{\frac{5}{2}}$.

12. $y' = 3t^{\frac{1}{2}} + \frac{9}{2} t^{-\frac{1}{4}} - \frac{7}{3} t^{\frac{4}{3}} - \frac{5}{3} t^{-\frac{1}{6}} - \frac{19}{4} t^{\frac{7}{12}}$.

13. $y' = 24x^7 - 5x^9 + \frac{21}{5} x^6 - \frac{9}{10} x^8 - 9x^2 + \frac{5}{2} x^4$.

14. $y' = \frac{7}{2}\sqrt{x^5} - \frac{5}{2}\sqrt{x^3} - \frac{1}{18\sqrt[6]{x^5}} - \frac{5}{18\sqrt[6]{x^{11}}}$.

15. $y' = \frac{3t^2 + 4t^3 - 8}{(1 + 2t)^2}$.

16. $y' = -\frac{2x^4 + 15x^2 + 12x}{(2x^2 + 5)^2}$.

17. $s' = \frac{12t - 8t^2 - 12}{(3 - 2t^2)^2}$.

18. $y' = \frac{x^4 - 6x^3 + 2x - 3}{(x^2 - 3x)^2}$.

19. $y' = -\frac{x^2 + 5}{(x^2 - 5)^2}$.

20. $y' = \frac{-2x + 3}{x^4}$.

m) **Láncszabály**

1. $y' = 4(3x^2 - 5x + 3)(6x - 5)$.

2. $y' = \dfrac{3x^2 - 4x}{3(x^3 - 2x^2)^{\frac{2}{3}}}$.

3. $y' = 24x\left(\dfrac{3x^2-2}{2x-3}\right)^3 - 6\,\dfrac{(3x^2-2)^4+1}{(2x-3)^4}$.

4. $y' = (10x - 3)\cdot\cos(5x^2 - 3x)$.

5. $y' = (4 + 12x^3)\cdot e^{4x+3x^4}$.

6. $y' = (6x - 1)\cdot\operatorname{sh}(3x^2 - x + 1)$.

7. $y' = \dfrac{3}{\sqrt{1-(3x+6)^2}}$.

8. $y' = \dfrac{12x^2 - 6}{4x^3 - 6x + 4}$.

9. $y' = \dfrac{2}{\sqrt{(2x-4)^2+1}}$.

10. $y' = 2 - \dfrac{2\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} - \dfrac{2\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{2x}} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x+1}}$.

11. $y' = \dfrac{6\sqrt{x}-1}{4\sqrt{3x^2-\sqrt{x^3}}}$.

12. $y' = \dfrac{-3}{(2+2\sqrt{x})\sqrt{2-3x}} - \dfrac{\sqrt{2-3x}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

13. $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sin\sqrt{1-x^2}$.

14. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\,e^{\sqrt{x+1}}$.

15. $y' = \dfrac{5}{2\sqrt{5x+1}}\operatorname{ch}\sqrt{5x+1}$.

16. $y' = \dfrac{1-2x}{2\sqrt{(x-x^2)(1-x+x^2)}}$.

17. $y' = \dfrac{1}{6+2x}$.

18. $y' = \dfrac{3}{\sqrt{(6x+4)^3-6x}\quad 4}$.

19. $y' = \dfrac{-42(3x+1)^2}{(2x-4)^4}$.

20. $y' = \dfrac{7}{\sqrt[3]{(2x-1)^2(x+3)^4}}$.

21. $y' = \dfrac{-12x^4 + 12x^3 + 4x - 1}{(6x^3+1)^2}$.

22. $y' = \dfrac{4}{(3x+1)^2}\left[1 + \left(\operatorname{tg}\dfrac{x-1}{3x+1}\right)^2\right]$.

23. $y' = \dfrac{1}{(1+x)^2}\,e^{\frac{x}{1+x}}$.

24. $y' = \dfrac{6}{(3-x)^2}\left[1 - \left(\operatorname{th}\dfrac{2x}{3-x}\right)^2\right]$.

25. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{4x^4-x^2}}$.

26. $y'=\dfrac{6x}{3x^2-6}-\dfrac{4x^3+6x}{x^4+3x^2}$.

27. $y'=\dfrac{1}{1-x^2}$.

28. $y'=4\sin^3 x\cdot\cos x$.

29. $y'=\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$.

30. $y'=\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}+2\dfrac{\sin 2x\cdot(\sin x+\cos x)}{\cos^2 2x}$.

31. $y'=\cos x[1+\operatorname{tg}^2(\sin x)]$.

32. $y'=-\sin x\cdot e^{\cos x}$.

33. $y'=(1+\operatorname{tg}^2 x)\cdot\operatorname{ch}(\operatorname{tg} x)$.

34. $y'=\dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}$.

35. $y'=-2\operatorname{tg} 2x$.

36. $y'=\dfrac{3\cos 3x}{\sqrt{\sin^2 3x+1}}$.

37. $y'=5(3e^{3x}-4e^{4x})(e^{3x}-e^{4x})^4$.

38. $y'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{3\sqrt[3]{(e^x+e^{-x})^2}}$.

39. $y'=\dfrac{e^x-2xe^{x^2}}{1-e^{2x}}+\dfrac{2e^{3x}-2e^{x^2+2x}}{(1-e^{2x})^2}$.

40. $y'=3e^{3x}\cdot\cos e^{3x}$.

41. $y'=e^x\cdot e^{e^x}$.

42. $y'=(2e^{2x}-e^x)[1-\operatorname{th}^2(e^{2x}-e^x)]$.

43. $y'=\dfrac{2xe^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}$.

44. $y'=\dfrac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$.

45. $y'=\dfrac{x^2e^x-1}{x^2-(xe^x+1)^2}$.

46. $y'=12\operatorname{ch}^2 4x\cdot\operatorname{sh} 4x$.

47. $y'=\dfrac{1-\operatorname{th}^2 x}{5\sqrt[5]{\operatorname{th}^4 x}}$.

48. $y'=\dfrac{\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{th} 2x-2(1-\operatorname{th}^2 2x)(\operatorname{ch} x-1)}{\operatorname{th}^2 2x}$.

49. $y'=-\dfrac{3\operatorname{ch} 3x}{\sin^2(\operatorname{sh} 3x)}$.

50. $y'=(1-\operatorname{cth}^2 x)e^{\operatorname{cth} x}$.

51. $y'=-\operatorname{ch} x[1-\operatorname{cth}^2(1-\operatorname{sh} x)]$.

52. $y'=\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$.

53. $y'=\dfrac{\operatorname{cth}^2 x-1}{2-\operatorname{cth} x}$.

54. $y'=\dfrac{\operatorname{sh} 2x}{\sqrt{\operatorname{ch}^4 x+1}}$.

55. $y'=\dfrac{8\arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}$.

56. $y'=\dfrac{-1}{3\sqrt{1-x^2}\sqrt[3]{\arccos^2 x}}$.

57. $y'=\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{\arccos^2 x\cdot\sqrt{1-x^2}}$; $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$.

(Főértékek esetén $k=0$.)

58. $y' = \dfrac{-\cos(1-\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

59. $y' = \dfrac{e^{\operatorname{arc\,tg} x}}{1+x^2}$.

60. $y' = \dfrac{-\operatorname{ch}(\operatorname{arc\,ctg} x)}{1+x^2}$.

61. $y' = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-\operatorname{arc\,tg}^2 x}}$.

62. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}$.

63. $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{\arccos^2 x+1}}$.

64. $y' = \dfrac{6\ln^2(1-2x)}{2x-1}$.

65. $y' = \dfrac{1}{\sqrt[4]{4x\ln^3 x}}$.

66. $y' = \dfrac{1-\ln 2}{x\ln^2 x}$.

67. $y' = \dfrac{\sin(\ln 3x)}{x}$.

68. $y' = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{x+\ln 4x}$.

69. $y' = \dfrac{\operatorname{sh}(\ln 2x)}{x}$.

70. $y' = \dfrac{1}{x+x\ln^2 x}$.

71. $y' = \dfrac{1}{x\ln 5x}$.

72. $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln^2 x-1}}$.

73. $y' = \dfrac{6\operatorname{ar\,th} 3x}{1-9x^2}$.

74. $y' = \dfrac{1}{\sqrt[4]{\operatorname{ar\,ch}^3 x}\cdot\sqrt{x^2-1}}$.

75. $y' = \dfrac{1}{(1-x^2)\operatorname{ar\,ch} x} - \dfrac{\operatorname{arc\,th} x}{\sqrt{x^2-1}\cdot\operatorname{ar\,ch}^2 x}$.

76. $y' = \dfrac{-\sin(\operatorname{ar\,sh} x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

77. $y' = \dfrac{e^{\operatorname{ar\,ch} x}}{\sqrt{x^2-1}}$.

78. $y' = -\dfrac{\operatorname{ch}(1-\operatorname{ar\,sh} x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

79. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{1-\operatorname{ar\,sh}^2 x}}$.

80. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}\cdot\operatorname{ar\,ch} x}$.

n) **Logaritmikus differenciálás**

3. $y' = \left(-\dfrac{1}{x^2}\cdot\ln x+\dfrac{1}{x^2}\right)x^{\frac{1}{x}}$.

4. $y' = \left(2x\cdot\ln(1-x)-\dfrac{x^2}{1-x}\right)(1-x)^{x^2}$.

5. $y' = \left(2x\cdot\ln(1+x)+\dfrac{x^2}{1+x}\right)(1+x)^{x^2}$.

6. $y' = 2\left(\dfrac{3\ln x}{2\sqrt{3x}}+\sqrt{\dfrac{3}{x}}\right)x^{\sqrt{3x}}$.

7. $x' = 3\left(\ln(t^2-6t)+\dfrac{2t^2-6t}{t^2-6t}\right)(t^2-6t)$.

8. $y' = 2x\cdot 3^{x^2+3}\cdot\ln 3$.

9. $y' = -\dfrac{2+\ln x}{2\sqrt{x}} \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$.

10. $y' = 3[\ln(x+1)+1] \cdot (x+1)^{x+1}$.

11. $y' = \left[-\dfrac{1}{2x^2}\ln(x^2-4) + \dfrac{1}{x^2-4}\right] \cdot (x^2-4)^{\frac{1}{2x}}$.

12. $y' = 2[(3x^2-3)\ln x + x^2 - 3]x^{x^3-3x}$.

13. $y' = 4\left[3\ln[3x^2-4x) + 3x\dfrac{6x-4}{3x^2-4x}\right](3x^2-4x)^{3x}$.

14. $y' = \left[2x(1+\ln x) + \dfrac{x}{1+\ln x}\right](1+\ln x)^{x^2}$.

15. $\dot{y} = \left[2t \cdot \ln(2t+5) + \dfrac{2(t^2+3)}{2t+5}\right](2t+5)^{t^2+3}$.

16. $y' = \left[-\dfrac{\ln x}{2\sqrt{1-x}} + \dfrac{\sqrt{1-x}}{x}\right] x^{\sqrt{1-x}}$.

17. $\dot{y} = \left[2t \cdot e^{t^2} \cdot \ln t + \dfrac{e^{t^2}}{t}\right] t^{e^{t^2}}$.

18. $y' = \left[\dfrac{\ln(1-3x)}{x} - \dfrac{3\ln x}{1-3x}\right](1-3x)^{\ln x}$.

19. $y' = \left[\dfrac{\ln x}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{1+x}\right] x^{\frac{x}{1+x}}$.

20. $\dot{y} = 3\left[(2t+3)\ln t + \dfrac{t^2+3t+1}{t}\right] t^{t^2+3t+1}$.

21. $y' = \left[\ln(x\ln x) + 1 + \dfrac{1}{\ln x}\right](x\ln x)^x$.

22. $y' = \left[e^x \cdot \ln(x+1) + \dfrac{e^x}{x+1}\right](x+1)^{e^x}$.

23. $y' = \left[e^{x+1} \cdot \ln x + \dfrac{e^{x+1}}{x}\right] x^{e^{x+1}}$.

24. $y' = \left[\dfrac{\ln(x^2+4)}{4} + \dfrac{x^2}{2x^2+8}\right]\left(\sqrt{x^2+4}\right)^{\frac{x}{2}}$.

25. $y' = 2\left[2\ln x + 2 + \ln(x^2+4) + \dfrac{2x^2}{x^2+4}\right] x(x^2+4)^{2x}$.

26. $y' = \left[-\dfrac{1}{x^2} \cdot \ln(3x^2-6x+7) + \dfrac{6x-6}{3x^3-6x^2+7x}\right] \cdot \sqrt[x]{3x^2-6x+7}$.

27. $y' = \left[-\dfrac{2\ln(2x+7)}{(2x+1)^2} + \dfrac{2}{(2x+1)(2x+7)}\right](2x+7)^{\frac{1}{2x+1}}$.

28. $y' = \left[-\dfrac{\ln(1-x^2)}{2\sqrt{1-x}} - \dfrac{2x\sqrt{1-x}}{1-x^2}\right](1-x^2)^{\sqrt{1-x}}$.

29. $y'=\left[e^x \ln\frac{1+x}{1-x}+e^x\frac{1}{1+x}+e^x\frac{1}{1-x}\right]\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{e^x}$.

30. $y'=x^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot\left[\frac{1}{(1-x)^2}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\ln x+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right]$.

31. $y'=2\left[\ln(x^2+4x+3)+\frac{(x+1)(2x+4)}{x^2+4x+3}\right](x^2+4x+3)^{x+1}$.

32. $y'=\left[\ln\left(\ln(2t+1)\right)+\frac{2t}{(2t+1)\ln(2t+1)}\right][\ln(2t+1)]^t$.

33. $y'=\frac{1+x^2}{x^3\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{2x}{1+x^2}-\frac{3}{x}+\frac{x}{1-x^2}\right]$.

34. $y'=y\left[\frac{3}{x}+\frac{x}{x^2+4}+\frac{x^2+1}{x^3+3x}\right]$.

35. $y'=y\left[\frac{6}{2x-5}+\frac{10x}{1-5x^2}-\frac{x}{x^2-1}\right]$.

36. $y'=y\left[\frac{2}{x}+\frac{1}{2x+7}-\frac{x}{x^2+5}\right]$.

37. $y'=y\left[\frac{1}{1+x}+\ln x+1\right]$.

38. $y'=y\left[\frac{1}{x+1}-\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right]$.

39. $y'=y\left[\frac{5}{x}+2x\ln 3\right]$.

40. $y'=y\left[-\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x\ln x}\right]$.

41. $y'=y\left[\frac{8t}{1+4t^2}-\frac{2}{t}-\frac{3t}{1+t^2}\right]$.

42. $y'=y\left[\frac{2}{t}-\frac{t}{1-t^2}-\frac{t^2}{1-t^3}\right]$.

43. $f'(x)=f(x)\cdot\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{2x+4}\right)$.

44. $f'(x)=f(x)\cdot\left(\frac{3}{x}-\frac{14}{1-2x}+\frac{4}{x+5}\right)$.

45. $x'=x\left[\frac{2}{t}-\frac{18t}{1-3t^2}+\frac{2-4t}{1-t+t^2}\right]$.

46. $x'=x\left[\frac{3}{y}+\frac{3}{6y+1}-\frac{3y+2}{3y^2+4y+4}\right]$.

47. $y'=y\left[\frac{2}{x}-\frac{3}{6x+5}-\frac{2x}{3x^2+4}\right]$.

48. $y'=y\left[\frac{1}{x}+\frac{3x+1}{3x^2+2x+1}-\frac{x^2-1}{x^3-3x}\right]$.

49. $\dot{y}=y\left[\frac{6t}{3t^2-2}+\frac{t}{t^2+3}-\frac{4t-5}{2t^2-5t+6}\right]$.

50. $y'=y\left[\frac{1}{x}-\frac{2}{3-4x}+\frac{4x^2-2x}{4x^3-3x^2}\right]$.

51. $y'=y\left[-\frac{2x}{1-x^2}-\frac{1}{2-2x}+\frac{1}{3+3x}\right]$.

52. $y'=\frac{y}{3}\left[\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}\right]$.

53. $\dot{y}=y\left[-\frac{9}{2-3t}+\frac{1}{2+2t}+\frac{4}{3-2t}+\frac{1}{3-3t}\right]$.

54. $y'=y\left[\frac{3}{x}+\frac{1}{2x+2\ln x}-\frac{4}{1+x}\right]$.

o) **Implicit függvények**

2. $y'=\frac{2xy}{8y-x^2}$.

3. $y'=\frac{6xy+4}{2-3x^2}$.

4. $y'=\frac{2x-3y}{3x-3y^2}$.

5. $y'=-\frac{2xy+2x}{x^2+3}$.

6. $y'=-\frac{3x^2+2y}{2x-2y}$.

7. $y'=-\frac{2x+2y}{2x-3y^2}$.

8. $y'=-\sqrt{\frac{y}{x}}$.

9. $y'=-\frac{4}{3}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt[6]{x^5}}-\frac{1}{2}\frac{y}{x}$.

10. $y'=\frac{9x^2-y^2}{2xy+2}$.

11. $y'=-\frac{2xy+2y}{x^2+2x+2y}$.

12. $y'=\frac{2y^2-2xy^2-2x}{2y-4xy+2x^2y}$.

13. $y'=-\frac{y^2+4xy+3y}{2xy+2x^2+3x}$.

14. $y'=-\frac{6xy+y^2-3}{3y^2+3x^2+2xy}$.

15. $y'=\frac{1-x}{e^{x+y}-e^{x-y}}$.

16. $y'=\frac{\sin 2x\cdot\cos^2 y}{\sin 2y\cdot\sin^2 x}$.

17. $y'=\frac{2x^2-y^2}{2xy\ln xy-xy}$.

18. $y'=\frac{e^{2x}(y^2+4)}{y}$.

19. $y'=-\frac{2e^{2x+y}+\cos(x+2y)}{e^{2x+y}+2\cos(x+2y)}$.

20. $y'=\frac{3^y\cdot 2^x\cdot(1+y^4)\ln 2}{2y-(1+y^4)3^y\cdot 2^x\cdot\ln y}$.

21. $y'=\frac{y^2(1+\ln^2 y)}{\sqrt{1-x^2y^2}-xy(1+\ln^2 y)}$.

22. $y'=\frac{2x\ln\sin y+y^2\operatorname{tg} x}{2y\ln\cos x-x^2\operatorname{ctg} y}$.

23. $y'=\frac{y\cos x\ln y-y^2\operatorname{ctg} x}{\ln\sin x-\sin x}$.

24. $y'=\frac{x\sqrt{x^2+y^2}-x^2+y^2}{y\sqrt{x^2+y^2}+x^2-y^2}$.

25. $y' = \dfrac{y \operatorname{ctg} xy - e^{x+y}}{e^{x+y} - x \operatorname{ctg} xy}$.

26. $y' = -\dfrac{2x \sin y - y^2 \cos x}{x^2 \cos y - 2y \sin x}$.

27. $y' = \dfrac{4y^2 e^{\frac{2}{x}} \cdot \sin\dfrac{y}{2} + x^2 y^2 e^{\frac{x}{2}} \cdot \sin\dfrac{2}{y}}{x^2 y^2 e^{\frac{2}{x}} \cdot \cos\dfrac{y}{2} + 4x^2 e^{\frac{x}{2}} \cdot \sin\dfrac{2}{y}}$.

28. $y' = \dfrac{xy + y\sqrt{x^2+y^2}}{x^2 + x\sqrt{x^2+y^2}}$.

29. $y' = \dfrac{y^2 + 3xy}{x^2 - xy}$.

30. $y' = \dfrac{xy - (x^{\ln y} + y^{\ln x}) \ln y}{-xy + (x^{\ln y} + y^{\ln x}) \ln x}$.

p) **Paraméteres alakban megadott függvények**

2. $m = 3;\ y = 3x - 5;\ y = -\dfrac{1}{3}x + 5;\ s_t = \dfrac{4}{3};\ s_n = 12.$

3. $m = \dfrac{1}{4};\ y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{15}{4};\ y = -4x + 25;\ s_t = 20;\ s_n = \dfrac{5}{4}.$

4. $m = -\dfrac{1}{3};\ y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3};\ y = 3x - 7;\ s_t = 3;\ s_n = \dfrac{1}{3}.$

5. $m = -\dfrac{3}{2};\ y = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2};\ y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{8}{3};\ x = \dfrac{4}{3};\ s_n = 3.$

6. $m = \dfrac{3}{2};\ y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2};\ y = -\dfrac{2}{3}x + 4;\ s_t = \dfrac{4}{3};\ s_n = 3.$

7. $m = \dfrac{2}{3};\ y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{4}{3};\ y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{19}{2};\ s_t = 3;\ s_n = \dfrac{4}{3}.$

8. $m = -\dfrac{1}{6};\ y = -\dfrac{1}{6}x + 2;\ y = 6x - 35;\ s_t = 6;\ s_n = \dfrac{1}{6}.$

9. $m = -2;\ y = -2x + \dfrac{3}{2};\ y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4};\ s_t = \dfrac{1}{4};\ s_n = 1.$

10. $m = 1;\ y = x - \dfrac{6}{\sqrt{3}};\ y = -x + \dfrac{10}{\sqrt{3}};\ s_t = \dfrac{2}{\sqrt{3}};\ s_n = \dfrac{2}{\sqrt{3}}.$

11. $m = 2;\ y = 2x;\ y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2};\ s_t = 0;\ s_n = 0.$

$m = \dfrac{3}{4};\ y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{\sqrt{3}}{4};\ y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{17\sqrt{3}}{18};\ s_t = \dfrac{2}{\sqrt{3}};\ s_n = \dfrac{3\sqrt{3}}{8};$

$m = 0;\ y = 1;\ x = 1;\ s_t = \infty;\ s_n = 0.$

12. $m = \sqrt{2};\ y = \sqrt{2}x - 1;\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x + 2;\ s_t = \dfrac{\sqrt{2}}{2};\ s = \sqrt{2}.$

13. $m = \dfrac{15}{4};\ y = \dfrac{15}{4}x - \dfrac{81}{4};\ y = -\dfrac{4}{15}x - \dfrac{41}{5};\ s_t = \dfrac{12}{5};\ s_n = \dfrac{135}{4}.$

14. $m=0;\ y=\sqrt{5};\ x=1;\ s_t=\infty;\ s_n=0;$

$m=2;\ y=2x+1;\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{4};\ s_t=1;\ s_n=4;$

$m=18;\ y=18x-5;\ y=-\frac{1}{18}x+\frac{55}{54};\ s_t=\frac{1}{18};\ s_n=18.$

15. $m=0;\ y=1;\ x=1;\ s_t=\infty;\ s_n=0.$

$m=6;\ y=6x+5;\ y=-\frac{1}{6}x+\frac{53}{18};\ s_t=\frac{1}{2};\ s_n=18.$

16. $m=-8;\ y=-8x+6;\ y=\frac{1}{8}x+\frac{31}{16};\ s_t=\frac{1}{4};\ s_n=16.$

17. $m=\frac{4}{5};\ y=\frac{4}{5}x+\frac{4}{5};\ y=-\frac{5}{4}x+\frac{13}{6};\ s_t=\frac{5}{3};\ s_n=\frac{16}{15}.$

18. $m=-0{,}577;\ y=-0{,}577x+0{,}5;\ y=1{,}73x-1;\ s_t=0{,}217;\ s_n=0{,}0722.$

$m=-1;\ y=-x+0{,}707;\ y=x;\ s_t=0{,}354;\ s_n=0{,}354.$

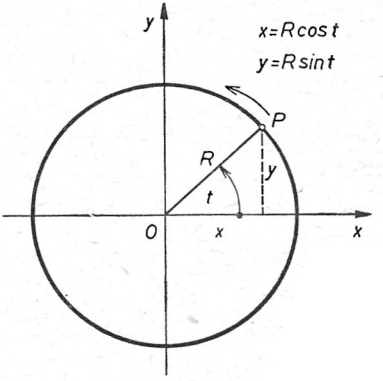
19. $m=-\frac{1}{2};\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2};\ y=2x-\frac{5}{2};\ s_t=3;\ s_n=\frac{3}{4};$

$m=-\frac{\sqrt{2}}{2};\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+3;\ y=\sqrt{2}x-3;\ s_t=\sqrt{2};\ s_n=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

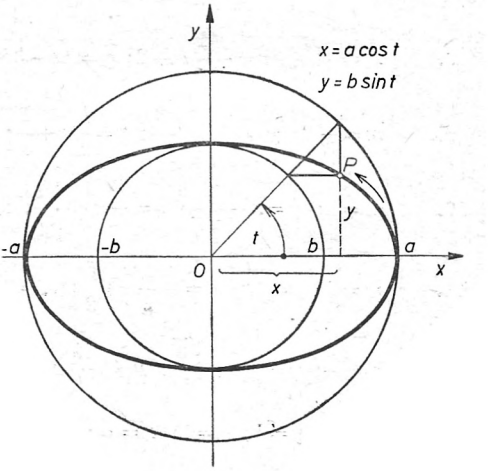
20. $m=-\frac{1}{8};\ y=-\frac{1}{8}x+\frac{5}{8};\ y=8x-\frac{15}{2};\ s_t=4;\ s_n=\frac{1}{16}.$

21. $\dot{x}=-R\sin t;\ \dot{y}=R\cos t;\ v=R.$

$\ddot{x}=-R\cos t;\ \ddot{y}=-R\sin t;\ a=R.$ (Lásd 38. ábra.)



38. ábra.



39. ábra.

22. $\dot{x}=-a\sin t;\ \dot{y}=b\cos t;\ v=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t};$

$\ddot{x}=-a\cos t;\ \ddot{y}=-b\sin t;\ a=\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}.$ (Lásd 39. ábra.)

23. $\dot{x}=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}$; $\dot{y}=2\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$; $v=\frac{2}{1+t^2}$;

$\ddot{x}=\frac{4(3t^2-1)}{(1+t^2)^3}$; $\ddot{y}=\frac{4(t^3-3t)}{(1+t^2)^3}$;

$a=\frac{4}{\sqrt{(1+t^2)^3}}$.

24. $\dot{x}=-\frac{4t}{(t^2-1)^2}$; $\dot{y}=-2\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2}$; $v=\frac{2\sqrt{t^4+6t^2+1}}{(t^2-1)^2}$;

$\ddot{x}=4\frac{3t^2+1}{(t^2-1)^3}$; $\ddot{y}=2\frac{t^3+3t}{(t^2-1)^3}$;

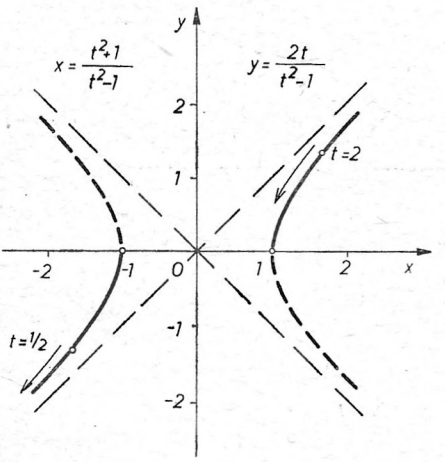
$a=\frac{4\sqrt{t^6+15t^4+15t^2+1}}{(t^2-1)^3}$. (Lásd 40. ábra.)

25. $\dot{x}=3\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$; $\dot{y}=3t\frac{2-t^3}{(1+t^3)^2}$;

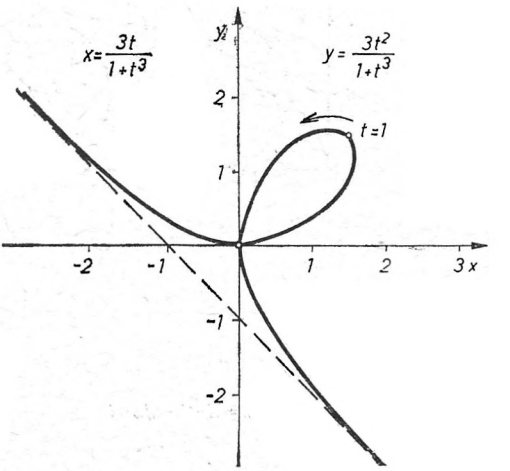
$v=\frac{3\sqrt{t^8+4t^6-4t^5-4t^3+4t^2+1}}{(1+t^3)^2}$

$\ddot{x}=18t^2\frac{t^6-t^3-2}{(1+t^3)^4}$; $\ddot{y}=6\frac{1-6t^3-6t^6+t^9}{(1+t^3)^4}$;

$a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}$. (Lásd 41. ábra.)



40. ábra.



41. ábra.

26. $\dot{x}=c$; $\dot{y}=gt$; $v=\sqrt{c^2+g^2t^2}$;

$\ddot{x}=0$; $\ddot{y}=g$; $a=g$. (Lásd 42. ábra.)

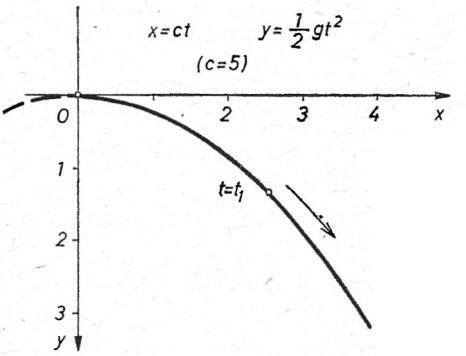
27. $\dot{x}=R(1-\cos t)$; $\dot{y}=R\sin t$; $v=2R\sin\frac{t}{2}$;

$\ddot{x}=R\sin t$; $\ddot{y}=R\cos t$; $a=R$. (Lásd 43. ábra).

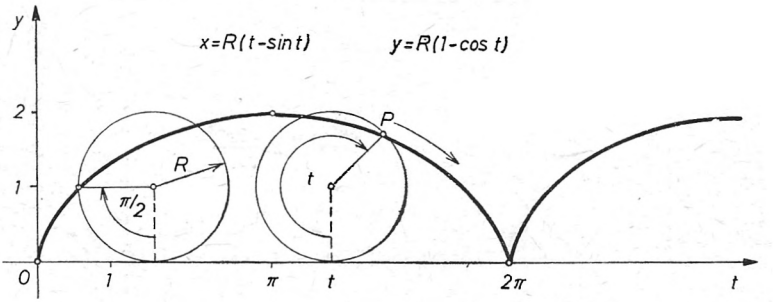
28. $\dot{x}=R-(R-a)\cos t$; $\dot{y}=(R-a)\sin t$;

$v=\sqrt{R^2-2R(R-a)\cos t+(R-a)^2}$;

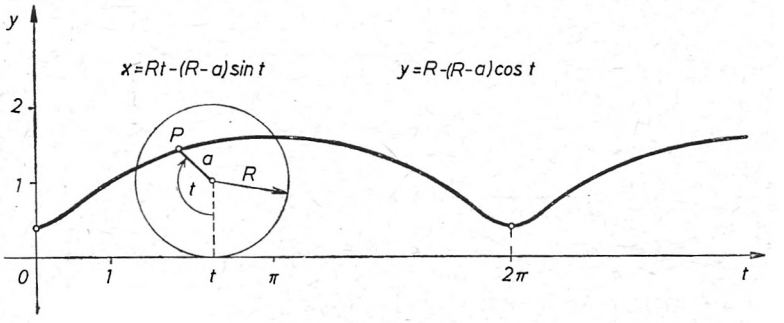
$\ddot{x}=(R-a)\sin t$; $\ddot{y}=(R-a)\cos t$; $a=(R-a)$. (Lásd 44. ábra.)



42. ábra.



43. ábra.



44. ábra.

q) Polárkoordinátás függvények

α) **1.** $\operatorname{tg}\omega=\dfrac{r}{\dfrac{dr}{d\varphi}}=\dfrac{1}{c}=\text{const}$, tehát $\omega=\text{const}$.

2. $\operatorname{tg}\omega=\varphi$; $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\varphi+\operatorname{tg}\varphi}{1-\varphi\operatorname{tg}\varphi}$.

3. $\operatorname{tg}\omega=\varphi$; $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\varphi+\operatorname{tg}\varphi}{1-\varphi\operatorname{tg}\varphi}$.

4. $\omega=2\varphi-\dfrac{\pi}{2}$; $\alpha=3\varphi-\dfrac{\pi}{2}$.

5. $\operatorname{tg}\omega=\dfrac{\varepsilon\cos\varphi-1}{\varepsilon\sin\varphi}$; $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\varepsilon-\cos\varphi}{\sin\varphi}$.

β) **1.** $\operatorname{tg}\omega_1=\dfrac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}$; $\operatorname{tg}\omega_2=\dfrac{\sin\varphi-1}{\cos\varphi}$.

Mivel $1+\dfrac{\sin^2\varphi-1}{\cos^2\varphi}=0$, azért $\Phi=\dfrac{\pi}{2}$.

2. $\operatorname{tg}\omega_1=\operatorname{tg}\varphi$; $\operatorname{tg}\omega_2=-\operatorname{ctg}\varphi$.

Mivel $1+\operatorname{tg}\varphi(-\operatorname{ctg}\varphi)=0$, $\Phi=\dfrac{\pi}{2}$.

3. $\operatorname{tg}\omega_1=-\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$; $\operatorname{tg}\omega_2=\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$.

Mivel $1+\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\left(-\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}\right)=0$, $\Phi=\dfrac{\pi}{2}$.

4. $\Phi=\dfrac{\pi}{2}$. **5.** $\Phi=\dfrac{\pi}{6}$. **6.** $\Phi=\dfrac{\pi}{6}$.

7. $\Phi=\operatorname{arc\,tg}\,3\sqrt{3}$; 0. **8.** $\Phi=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{3+\sqrt{3}}{5}$; 0.

9. $\Phi=\dfrac{\pi}{4}$; arc tg 2. **10.** $\Phi=\operatorname{arc\,tg}\,2$. **11.** $\Phi=\dfrac{\pi}{3}$.

12. $\Phi=0$; arc tg 2. **13.** $\Phi=\dfrac{\pi}{4}$.

γ) **1.** Fent: $\varphi=\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{9\pi}{4}$; lent: $\varphi=0,\dfrac{3\pi}{2}$;

jobbra: $\varphi=\dfrac{9\pi}{8},\dfrac{21\pi}{8}$; balra: $\varphi=\dfrac{3\pi}{8},\dfrac{15\pi}{8}$.

2. Fent: $\varphi=\dfrac{3\pi}{8}$; lent: $\dfrac{7\pi}{8}$; bal: $\dfrac{5\pi}{8}$; jobb: $\dfrac{\pi}{8}$.

3. Fent: $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$; lent: $\dfrac{4\pi}{3}$; jobb: $\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}$; bal: π.

4. Fent: $\varphi = 54{,}7°$; lent: $234{,}7°$; jobb: $35{,}3°$; bal: $215{,}3°$.

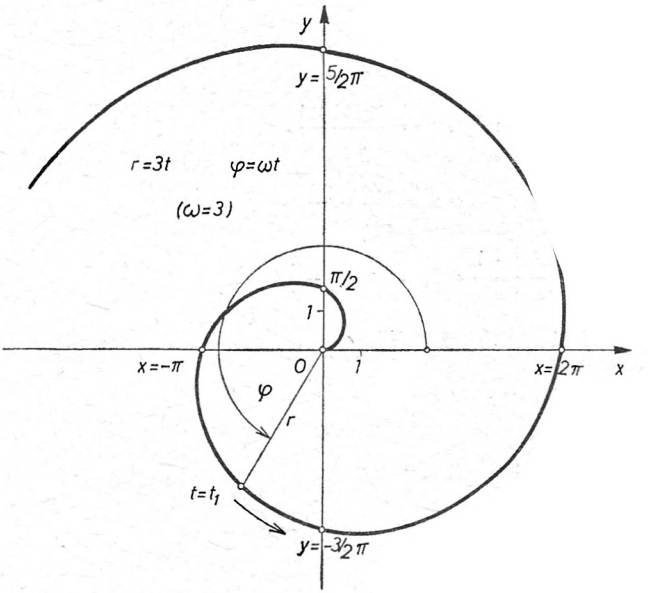
5. Fent: $\varphi = \frac{\pi}{3}$; lent: $\frac{5\pi}{3}$; jobb: 0; bal: $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

δ) **1.** $v_r = 0$; $v_\varphi = R\omega$; $v = R\omega$.

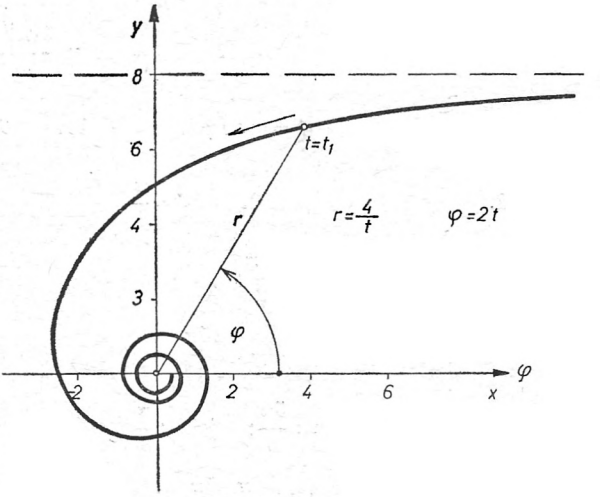
$a_r = -R\omega^2$; $a_\varphi = 0$; $a = R\omega^2$.

2. $v_r = 3$; $v_\varphi = 3\omega t$; $v = 3\sqrt{1+\omega^2 t^2}$.

$a_r = -3\omega^2 t$; $a_\varphi = 6\omega$; $a = 3\omega\sqrt{4+\omega^2 t^2}$. (Lásd 45. ábra.)



45. ábra.



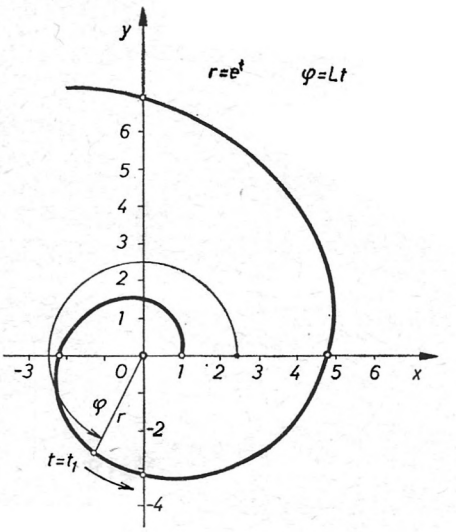
46. ábra.

3. $v_r=-\frac{4}{t^2}$; $v_\varphi=\frac{8}{t}$; $v=\frac{8\sqrt{1+4t^2}}{t^2}$.

$a_r=\frac{8}{t^3}-\frac{16}{t}$; $a_\varphi=-\frac{16}{t^2}$; $a=\frac{8\sqrt{1+4t^4}}{t^3}$. (L. 46. ábra.)

4. $v_r=e$; $v_\varphi=4e^t$; $v=\sqrt{17}\cdot e^t$.

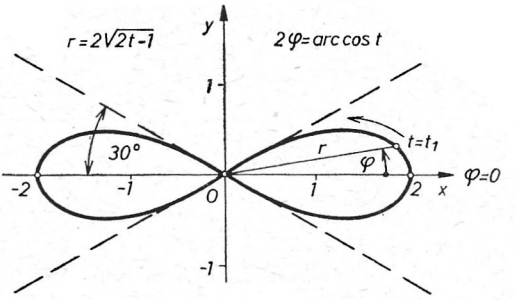
$a_r=-15e^t$; $a_\varphi=8e$; $a=\sqrt{289}\cdot e^t$. (L. 47. ábra).



47. ábra.

5. $v_r=\frac{2}{\sqrt{2t-1}}$; $v_\varphi=-\frac{\sqrt{2t-1}}{1-t^2}$.

$a_r=-\frac{2}{(2t-1)^{3/2}}-\frac{\sqrt{2t-1}}{2-2t^2}$.



48. ábra.

$a_\varphi=-\frac{2}{\sqrt{(2t-1)(1-t^2)}}-\frac{t\sqrt{2t-1}}{(1-t^2)^{3/2}}$. (L. 48. ábra.)

6. $v_r=-\frac{16t}{(1+3t^2)^2}$; $v_\varphi=\frac{8}{1+3t^2}$.

$a_r=\frac{144t^2-16}{(1+3t^2)^3}-\frac{16}{(1+3t^2)(1+t^2)}$;

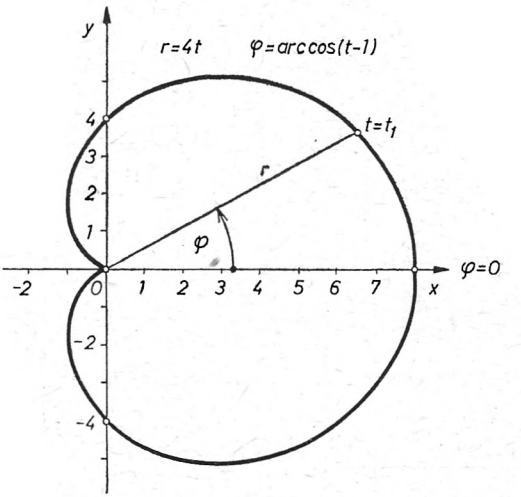
$a_\varphi=-\frac{64t}{(1+3t^2)^2(1+t^2)}-\frac{16t}{(1+3t^2)(1+t^2)}$.

7. $v_r=-\frac{1}{t^2}$; $v_\varphi=-\frac{2}{t\sqrt{1-t^2}}$.

$a_r=\frac{2}{t^3}-\frac{4}{t-t^3}$; $a_\varphi=\frac{2}{(1-t^2)^{3/2}}-\frac{4}{t^2(1-t^2)^{1/2}}$.

8. $v_r=4; \quad v_\varphi=-\dfrac{4t}{\sqrt{2t-t^2}}$.

$a_r=\dfrac{4}{2-t}; \quad a_\varphi=\dfrac{4t-4t^2}{(2t-t^2)^{3/2}}-\dfrac{8}{\sqrt{2t-t^2}}$. (L. 49. ábra.)



49. ábra.

4. §. MAGASABBRENDŰ DIFFERENCIÁLHÁNYADOSOK

1. $y''=12x^2-72x-96; \quad y'''=24x-72.$

2. $y''=6x+2\sin x; \quad y'''=6+2\cos x.$

3. $y''=\dfrac{2}{(1+x^2)^2}; \quad y'''=-\dfrac{8x}{(1+x^2)^3}.$

4. $y''=-2e^{-t}\cos t; \quad y'''=2e^{-t}(\cos t+\sin t).$

5. $y''=\dfrac{10}{9}x^{-\frac{8}{3}}; \quad y'''=-\dfrac{80}{27}x^{-\frac{11}{3}}.$

6. $y''=-\dfrac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}; \quad y'''=\dfrac{8}{27}x^{-\frac{7}{3}}.$

7. $y''=(2+4t^2)e^{4+t^2}; \quad y'''=(12t+8t^3)e^{4+t^2}.$

8. $y''=(6x+6x^2+x^3)e^x; \quad y'''=(6+18x+9x^2+x^3)e^x.$

9. $y''=\dfrac{216x}{(4-9x^2)^2}; \quad y'''=\dfrac{216(4+36x-9x^2)}{(4-9x^2)^3}.$

10. $y''=e^{-x^2}(4x^3-6x); \quad y'''=e^{-x^2}(-8x^4+24x^2-6).$

11. $y''=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}; \quad y'''=\dfrac{11-6\ln x}{x^4}.$

12. $y''=2\ln x+3; \quad y'''=\frac{2}{x}$.

13. $y''=-\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}; \quad y'''=-\frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}}$.

14. $y''=\cos t-t\sin t; \quad y'''=-2\sin t-t\cos t$.

15. $y''=-e^{-\frac{t}{2}}(15\sin 2t+8\cos 2t); \; y'''=\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}(47\sin 2t-52\cos 2t)$

16. $y''=-\frac{3}{2}e^{\frac{t}{2}}(7\cos 2t+23\sin 2t); \; y'''=-\frac{3}{4}e^{\frac{t}{2}}(51\sin 2t-85\cos 2t)$.

17. $y''=e^{-\frac{t}{3}}\left(\sin\frac{t}{2}-\frac{5}{12}\cos\frac{t}{2}\right); \; y'''=\frac{1}{72}e^{-\frac{t}{3}}\left(46\cos\frac{t}{2}-21\sin\frac{t}{2}\right)$.

18. $y''=5e^{-\frac{t}{4}}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right); \; y'''=\frac{5}{8}e^{-\frac{t}{4}}\left(4\cos\frac{t}{2}+3\sin\frac{t}{2}\right)$.

19. $y''=4\operatorname{tg}^5 x+4\operatorname{tg}^3 x; \quad y'''=20\operatorname{tg}^6 x+32\operatorname{tg}^4 x+12\operatorname{tg}^2 x$.

20. $y''=\frac{2\sin x}{\cos^2 x}; \quad y'''=\frac{2}{\cos x}+\frac{4\sin^2 x}{\cos^3 x}$.

21. $y''=\frac{2-x^2}{(1-x^2)^{3/2}}; \quad y'''=\frac{4x-x^3}{(1-x^2)^{5/2}}$

22. $y''=\frac{-2x}{(2-x^2)^{3/2}}$.

23. $y''=-\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$.

24. $y''=\frac{-4+2x^2}{x^5}\sin\frac{2}{x}+\frac{8}{x^4}\cos\frac{2}{x}$.

25. $y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

26. $y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!x^{-n-1}$.

27. $y^{(n)}=2^n\cdot e^{2x}$.

28. $y^{(n)}=2^n\cdot\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

29. $y^{(n)}=5(-2)(-3)(-4)\ldots(-2-n+1)\cdot x^{-2-n}$.

30. $y^{(n)}=3^n\cdot e^{3x+1}$.

31. $y^{(n)}=(\sqrt{2})^n\cdot e^x\cdot\cos\left(n+x\frac{\pi}{4}\right)$.

32. $y^{(n)}=a^x\cdot\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+\binom{n}{1}a^x\cdot\ln a\cdot\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)+$

$+\binom{n}{2}a^x(\ln a)^2\cos\left(x+(n-2)\frac{\pi}{2}\right)+\ldots+\binom{n}{2}a^x(\ln a)^{n-2}\cos\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)+$

$+\binom{n}{1}a^x(\ln a)^{n-1}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+a^x(\ln a)^n\cos x$.

33. $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot x^{-n-1}\cdot\left[(n-1)!+\binom{n}{1}(n-2)!+\binom{n}{2}2!(n-3)!+\right.$

$\left.+\ldots+\binom{n}{2}(n-2)!+\binom{n}{1}(n-1)!-n!\ln x\right]$.

34. $y^{(n)}=\frac{1}{3}(-1)^n\cdot n!\,\frac{(x+1)^{n+1}-(x-2)^{n+1}}{(x^2-x-2)^{n+1}}$.

35. $y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\,\frac{(x-2)^{n+1}-(x-3)^{n+1}}{(x^2-5x+6)^{n+1}}$.

5. §. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS KÖZÉPÉRTÉKTÉTELE

6. $\lg 6{,}2=\lg 6+\frac{0{,}2\cdot\lg e}{6+\vartheta\cdot 0{,}2}$, $(0<\vartheta<1)$.

$$0{,}792\,16<\lg 6{,}2<0{,}792\,63.$$

7. 0,97; 0,82; 0,54; 0,17; −0,23; −0,585; −0,85; −0,98.

(Az adott értéktáblázat az $y=\sin x$ függvény értéktáblázata. Ellenőrzésül szolgál és egyben a hibabecslésre is alkalmat ad, hogy $(\sin x)'=\cos x$, s így az eredményt táblázatból vett értékekkel hasonlíthatjuk össze.)

MÁSODIK RÉSZ

A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS EGYÉB ALKALMAZÁSAI

6. §. BERNOULLI–L'HOSPITAL SZABÁLYA

f) **1.** 0. **2.** $\frac{1}{3}$. **3.** 0. **4.** 0.

5. $-\frac{1}{2}$. **6.** ∞. **7.** $\ln\frac{a}{b}$. **8.** $\frac{m}{n}$.

9. 3. **10.** 1. **11.** 2. **12.** 0.

13. 0. **14.** 1. **15.** 0. **16.** 0.

17. $-\frac{2}{\pi}$. **18.** a. **19.** $\frac{1}{2}$. **20.** 0.

21. 1. **22.** $\sqrt[3]{e^3}$.

7. §. FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT

4. Maximum: $x=-1$; minimum: $x=4$; infl. p.: $x=\frac{3}{2}$.

5. Max.: $x=-2$; min.: $x=3$; infl. p.: $x=\frac{1}{2}$.

6. Max.: $x=-2$; min.: $x=6$; infl.p.: $x=2$.

7. Max.: $x=-6$; min.: $x=-2$; infl.p.: $x=-4$.

8. Max.: $x=-1$; min.: $x=3$; infl.p.: $x=1$.

9. Max.: $x=-1$; min.: $x=0{,}6$; infl.p.: $x=-\frac{1}{5}$.

10. Max.: $x=-1$; min.: $x=3$; infl. p.: $x=1$.

11. Max.: $x=\frac{1}{3}$; min.: $x=-3$; infl. p.: $x=-\frac{4}{3}$.

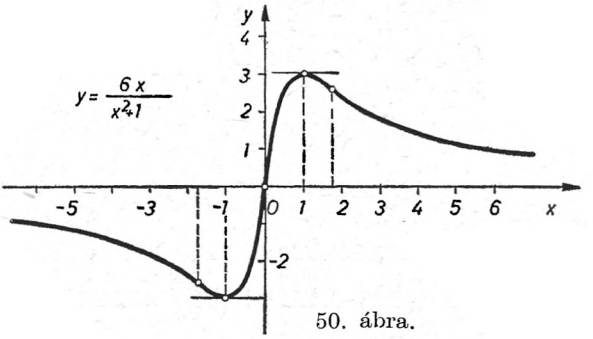
12. Max.: $x=\pm\sqrt{12}$; min.: $x=0$; infl. p.: $x=\pm 2$.

13. Max.: $x=1{,}6$; min.: $x=2$; infl. p.: $x=1$; $x=1{,}35$; $x=1{,}84$.

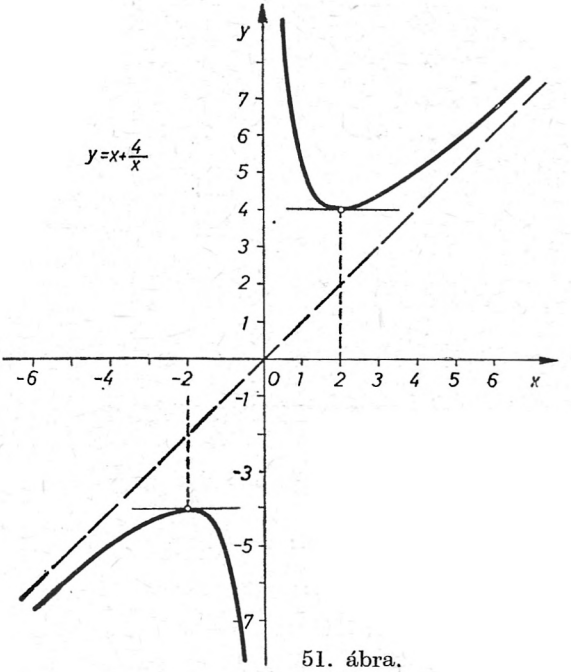
14. Max.: $x=1$; min.: $x=3$; infl. p.: $x=0$; $x=0{,}64$; $x=2{,}37$.

15. Max.: $x=1$; min.: $x=-1$; infl. p.: $x=0$; $x=\pm\sqrt{3}$ (L. 50. ábra.)

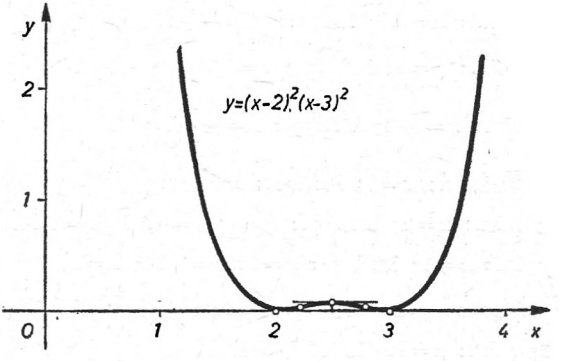
16. Max.: $x=-2$; min.: $x=2$. (L. 51. ábra.)



50. ábra.



51. ábra.



52. ábra.

17. Max.: $x=\frac{5}{2}$; min.: $x=2$; $x=3$; infl. p.: $x=2{,}21$; $x=2{,}79$. (L. 52. ábra.)

18. Max.: $x=\frac{7}{2}$; min.: $x=3$; $x=4$; infl. p.: $x=3{,}2$; $x=3{,}8$.

19. Min.: $x=4$; infl. p.: $x=-5{,}03$.

20. Max.: $x=-3$; min.: $x=3$.

21. Max.: $x=-2$; min.: $x=0$. (L. 53. ábra.)

22. Max.: $x=-6$.

23. Max.: $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; infl. p.: $x=\sqrt[3]{2}$. (L. 54. ábra.)

24. Max.: $x=-0{,}507$; min.: $x=0{,}507$. (L. 55. ábra.)

25. Min.: $x=-2$; infl. p.: $x=\sqrt[3]{16}$.

26. Max.: $x=-1$; min.: $x=1$.

27. Max.: $x=2$; min.: $x=-2$.

28. Max.: $x=-2$; min.: $x=0$.

29. Max.: $x=-4$; $x=\frac{4}{5}$; min.: $x=\pm 2$. (L. 56. ábra.)

30. Max.: $x=-2$; min.: $x=-\frac{7}{5}$; infl. p.: $x=-\frac{1}{2}$;

$x=-1{,}03$; $x=-1{,}77$.

31. Max.: $x=-3$; min.: $x=3$. (L. 57. ábra.)

32. Max.: $x=-7$; min.: $x=-1$. (L. 58. ábra.)

33. Max.: $x=-\sqrt{2}$; min.: $x=+\sqrt{2}$.

34. Max.: $x=2$; min.: $x=-2$.

35. Max.: $x=-0{,}83$; min.: $x=4{,}83$.

36. Max.: $x=3$.

37. Max.: $x=2$; min.: $x=0$. (L. 59. ábra.)

38. Max.: $x=1{,}45$; min.: $x=-3{,}45$.

39. Min.: $x=-3$.

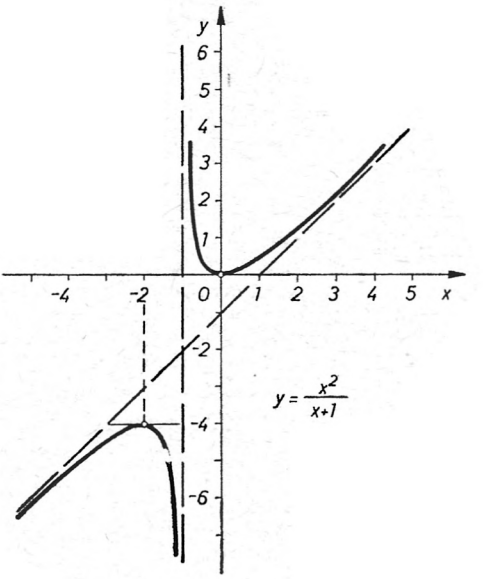
40. Max.: $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$; min.: $x=\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi$;

infl. p.: $x=\arccos\frac{1}{3}$.

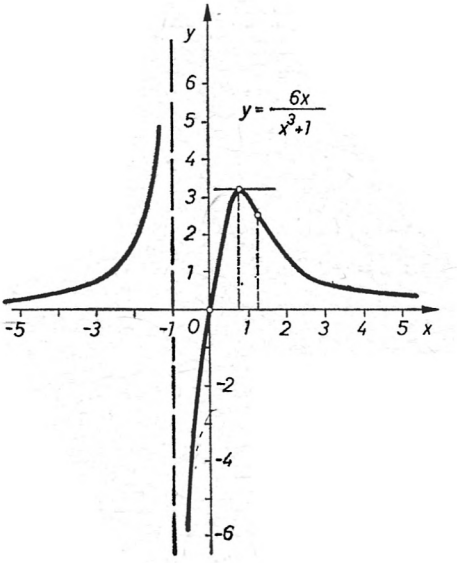
41. Max.: $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$; min.: $x=\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi$;

infl. p.: $x=k\pi$.

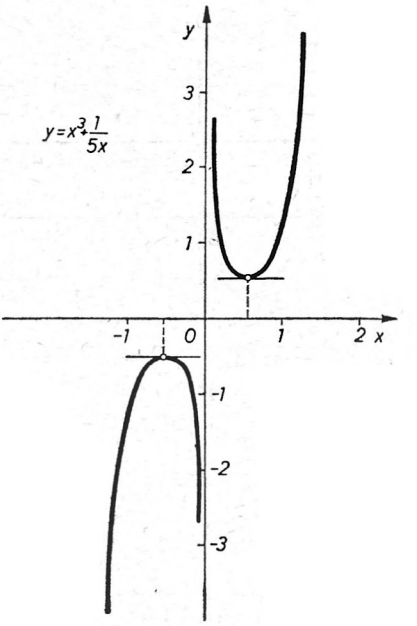
Max.: $x=2$; min.: $x=-2$; infl. p.: $x=0$.



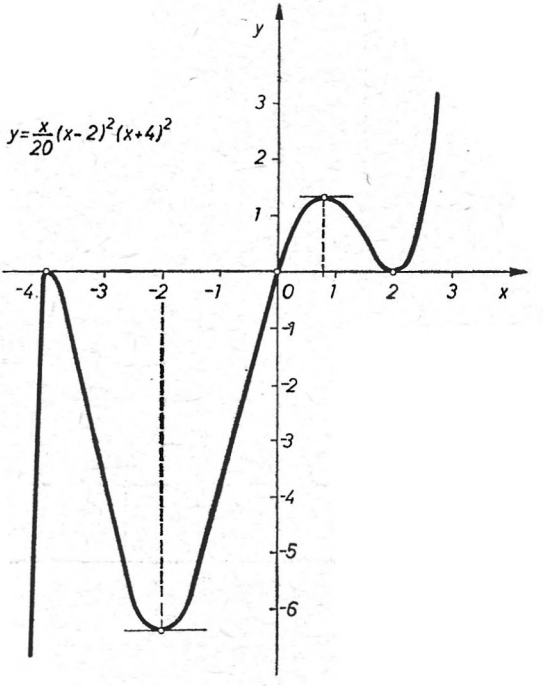
53. ábra.



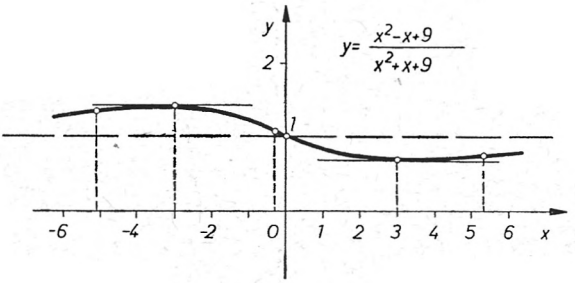
54. ábra.



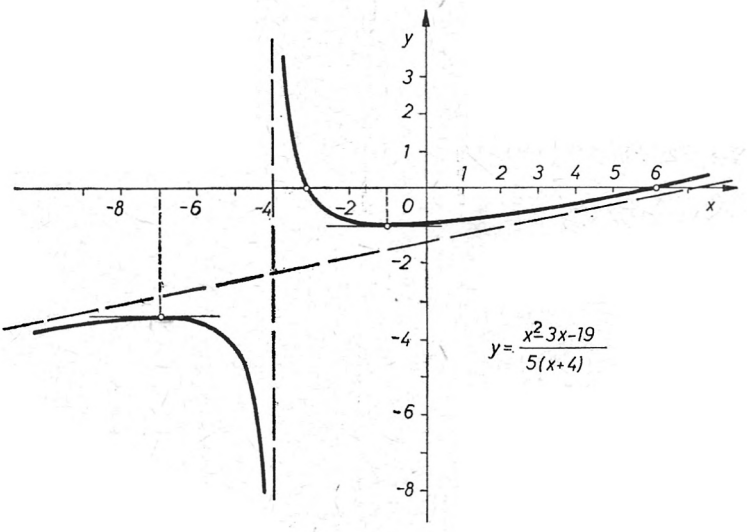
55. ábra.



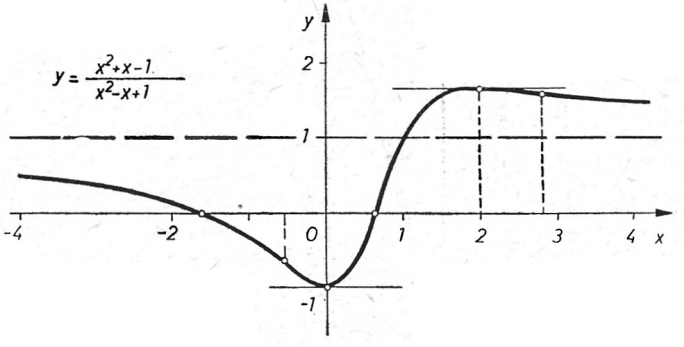
56. ábra.



57. ábra.



58. ábra.

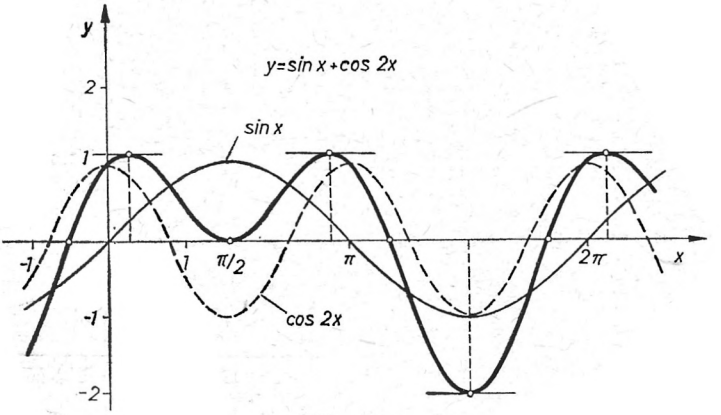


59. ábra.

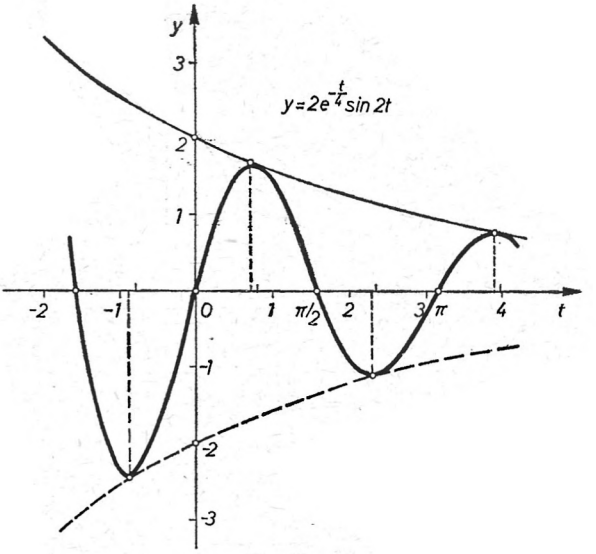
43. Szélsőérték: $x=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(-2)$; infl. p.: $x=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$.

44. Max.: $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$; min.: $x=k\pi$; infl. p.: $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$.

45. Szélsőérték: $x=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$; infl. p.: $x=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{3}{4}\right)$.



60. ábra.



61. ábra.

46. Szélsőérték: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $x=\arcsin\frac{1}{4}$. (L. 60. ábra.)

47. Szélsőérték: $t=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}2$.

48. Szélsőérték: $t=\arccos\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$; $t=\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$; $t=(2k+1)\pi$.

49. Szélsőérték: $t=\frac{\pi}{6}+2k\pi$; $t=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$.

50. Szélsőérték: $t=\frac{\pi}{3}+2k\pi$; $t=2k\pi-\frac{\pi}{3}$.

51. Szélsőérték: $t=\arcsin\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $t=\arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

52. Szélsőérték: $t=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}2$.

53. Szélsőérték: $t=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}8$.

(L. 61. ábra.)

54. Szélsőérték: $t=\operatorname{arc\,tg}(-2)$.

55. Szélsőérték: $t=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{4}\right)$.

(L. 62. ábra.)

56. Szélsőérték: $t=2\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{4}\right)$.

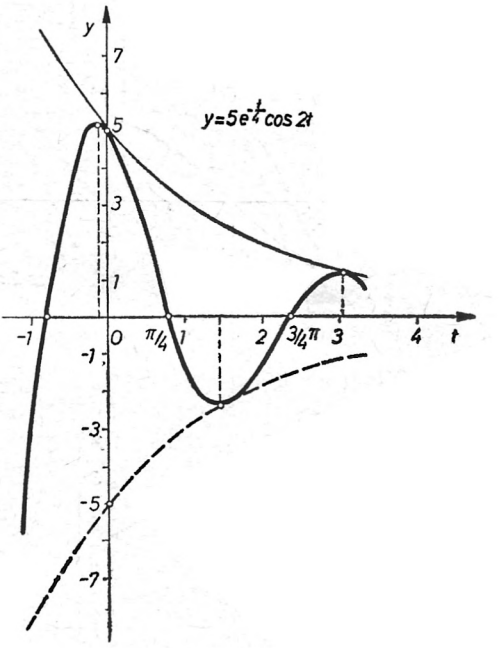
57. Szélsőérték: $t=k\pi-\frac{\pi}{12}$.

58. Szélsőérték: $t=\operatorname{arc\,tg}8-1$.

59. Szélsőérték: $t=\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{6}\right)$.

60. Szélsőérték: $t=\operatorname{arc\,tg}(-3)$.

61. Szélsőérték: $t=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{6}{7}$.



62. ábra.

8. §. SZÉLSŐÉRTÉK-FELADATOK

5. $m=\frac{4R}{3}$.

6. $a:b=2:5$; $a=\sqrt[3]{\frac{2V}{5}}$.

7. $r=\frac{2}{3}R$.

8. Négyzet.

9. $r=m$.

10. Ha az átfogóval párhuzamos oldal hossza egyenlő az átfogóra merőleges oldal hosszával.

11. $m=\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

12. $a=90{,}92$ cm; $b=121{,}28$ cm.

13. Szélesség: $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot d$; magasság: $\frac{3}{4}\cdot d$.

14. 4; 4.

15. 2 m.

16. Alap: 5,06 m; oldal: 6,35 m;

17. $v=\frac{3c}{2}$.

18. $R=1{,}2$ m.

19. $x=\frac{8}{3}$; $y=\frac{4}{3}$.

20. $R=4$ m.

21. $r=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

22. $a=1{,}05$ m; $b=0{,}68$

23. a) $m=2{,}08$ m.
b) $m=1{,}89$ m.
c) $m=2{,}4$ m.
d) $m=14{,}4$ m.

24. $a=6$; $b=6$; $m=3$.

25. $K=2R\pi+4x$; $R=\frac{K-4x}{2\pi}$. Ezzel $A=\frac{(K-4x)^2}{4\pi}+x^2$.

$A'=2x-\frac{8(K-4x)}{4\pi}=2x-4R$. Ez 0, ha $x=2R$.

26. $a=2R$.

27. Mindkettő 12,5 cm.

28. $(2,\ \pm 4)$.

29. $a=b=12{,}5$ cm.

30. Az arányossági tényező legvalószínűbb értéke egyenlő a mérési adatokból számított arányossági tényezők számtani középértékével. $k=1{,}135$.

31. $k=3{,}307$.

32. $k=8$.

33. $\varphi\approx 55°$.

34. Egyenlő szárú.

35. $(-1,\ -3)$.

37. Alapél: 2 m; magasság: $2\sqrt{3}$ m.

36. $\overline{BP}=\frac{\overline{AD}}{\sqrt{2}}$.

38. Az $\overline{AB}$ és a keresett egyenes által bezárt szög:

$$\xi=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}\cdot\sin\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha\right).$$

39. a) $\frac{r}{m}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) $\frac{r}{m}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

40. $\lambda=a$.

41. $x=\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$.

42. $\frac{dU}{dR}=E^2\frac{r^2-R^2}{(r+R)^4}$. Ez pedig akkor 0, ha $r=R$.

43. $a=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$.

44. $t=\frac{k\pi+\varphi}{\omega}$.

45. Ott lehet szélsőérték, ahol a differenciálhányados zérus:

$$2(x-a_1)+2(x-a_2)+\ldots+2(x-a_n)=0.$$

Innen rendezéssel

$$x=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

9. §. GÖRBÜLET. GÖRBÜLETI KÖR, EVOLUTA, EVOLVENS

b) **Görbületi kör**

4. $R=\sqrt{8}$; $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$.

5. $R=\frac{5\sqrt{10}}{3}$; $\left(-4, \frac{5}{3}\right)$;

6. $R=\frac{1}{2}$; $\left(2, -\frac{5}{2}\right)$.

7. $R=7{,}75$; $(7{,}47, -6{,}2)$.

8. $R=6{,}24$; $(6{,}8, -0{,}32)$.

9. $R=4\sqrt{2}$; $(-3, -2)$.

10. $R=9{,}4$; $(4{,}19, -3{,}84)$.

11. $R=23{,}2$; $(14{,}36, 17{,}77)$.

12. $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

13. $R=12$, $(12, 0)$.

14. $R=1$; $(1, 0)$.

15. $R=2{,}04$; $\left(\frac{5}{8}, -\frac{13}{12}\right)$.

16. $R=10{,}4$; $\left(-\frac{16}{3}, \frac{29}{4}\right)$.

17. $R=5{,}6$; $\left(\frac{52}{8}, 7\right)$.

18. $R=5{,}6$; $\left(-\frac{7}{2}, 5\right)$.

19. $R=11{,}2$; $(-8, 6)$.

20. $R=70$; $(-71, 13)$.

21. $R=0{,}8$; $\left(\frac{19}{14}, \frac{16}{7}\right)$.

22. $R=1$; $(0, 1)$.

23. $R=1$; $(0, 0)$.

24. $R=2\sqrt{2}$; $(-1, 3)$.

25. $R=\frac{1}{2}$; $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

26. $R=\frac{1}{36}$; $\left(0, -\frac{1}{36}\right)$.

27. $R=5\sqrt{5}$; $(-7, 8)$.

28. $R=2{,}8$; $(-0{,}25, 2{,}5)$.

29. $R=\infty$; $x=\infty$; $y=0$.

30. $R=1$; $(1, 0)$.

31. $R=\frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{a^2}$.

32. $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

33. Max.: $x=k\pi$; min.: $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$.

34. Max.: $x=\pm a$; min.: $x=0$.

35. $x=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{30}}$.

36. Max.: $x=\frac{1}{4}$.

37. A parabola csúcspontjában.

38. $x=2$.

39. $\left(3, \frac{3}{2}\right)$; $x=3$.

40. $\left(3, -\frac{35}{4}\right)$; $x=3$.

41. $\left(\frac{8}{3}, -\frac{5}{6}\right)$; $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

42. $\left(\frac{127}{6}, \frac{309}{20}\right)$; $y=\frac{3}{10}x+\frac{91}{10}$.

43. $(-2, 3)$; $y=-x+1$.

44. $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$; $x=\frac{\pi}{2}$.

45. $\left(-\frac{33}{2}, \frac{37}{12}\right)$; $y=-\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}$.

46. $\left(\frac{7}{4}, \frac{7}{4}\right)$; $y=x$.

47. $(2, 5)$; $x=2$.

48. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{37}{4}\right)$; $y=-\frac{1}{2}x+9$.

49. $(2, 2)$; $y=2$.

50. $\left(\frac{5}{2}, -3\right)$; $y=-2x+2$.

51. $\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$; $x=-x+1$.

52. $\left(\frac{39}{2}, -12\right)$; $y=-\frac{2}{3}x+1$.

53. $\left(4, \frac{5}{2}\right)$; $x=4$.

54. $\left(\frac{17}{3}, -1\right)$; $y=-3x+16$.

55. $\left(-\frac{29}{8}, -\frac{13}{2}\right)$; $y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$.

56. $(-7, 8)$; $y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$.

c) Evoluta, evolvens

4. $\xi=-8t^3$; $\eta=6t^2$.

5. $\xi=t-\frac{1}{4}t^5$; $\eta=\frac{5}{6}t^3+\frac{2}{t}$.

6. $\xi=3-t+\frac{9}{4}t^5$; $\eta=\frac{2}{3t}+3t^2+\frac{3}{2}t^5$.

7. $\xi=1+t-\frac{1}{4}t^5$; $\eta=\frac{2}{t}+\frac{5}{6}t^3$.

8. $\xi=\frac{12t^4+1}{2t^3}$; $\eta=\frac{4t^4+3}{t}$.

9. $\xi=-32t^3$; $\eta=\frac{7-24t^2}{2}$.

10. $\xi=t^3-2t-t\frac{9t^4-8t^2+4}{3t^2+2}$; $\eta=t^3-(3t^2-2)\frac{9t^4-8t^2+4}{6t^2+4}$.

11. $\xi=-3t^2-\frac{5}{3}$; $\eta=1-4t-18t^3$.

12. $\xi=-5t^3-3t^2$; $\eta=\frac{5}{2}t^3+9t^2+6t+4$.

13. $\xi=4t^3+2$; $\eta=\frac{17}{2}-3t^2$.

14. $\xi=t^2+\frac{3}{2}$; $\eta=5-2t-4t^3$.

15. $\xi=-4t^3+12t^2-12t+7$; $\eta=3t^2-6t-\frac{25}{2}$.

16. $\xi=-2\cos t\cdot\operatorname{ctg} t$; $\eta=t+\frac{\cos t+\cos^3 t}{\sin t}$.

17. $\xi=\frac{144\sin^3 t}{13}$; $\eta=-\frac{144\cos^3 t}{5}$.

18. $\xi=4(t+\sin t)$; $\eta=-4(1-\cos t)$.

19. $\xi=\frac{1}{3}(2\cos t-\cos 2t)$; $\eta=\frac{1}{3}(2\sin t-\sin 2t)$.

20. $\xi=(3\cos t+\cos 3t)\left(1-\frac{1+\cos 4t}{2(1+\cos 2t)}\right)$;

$\eta=(3\sin t+\sin 3t)\left(1-\frac{1+\cos 4t}{2(1+\cos 2t)}\right)$.

21. $\xi=\frac{3\sin^2 t-\cos t+2-3\sin^4 t}{\cos^3 t(6\sin^2 t-\cos t+2)}$; $\eta=\operatorname{tg}^3 t+\frac{3\sin t(1+\sin^2 t)}{\cos^3 t(6\sin^2 t-\cos t+2)}$.

22. $\xi=\frac{25}{3\sin^3 t}$; $\eta=-\frac{25\cos^3 t}{4\sin^3 t}$.

23. $\xi=\cos^4 t+2\sin^2 t(\sin^4 t+\cos^4 t)$; $\eta=\sin^4 t+2\cos^2 t(\sin^4 t+\cos^4 t)$.

24. $\xi=\cos t$; $\eta=t+\sin t$.

25. $\xi=t+\cos t-2$; $\eta=t+\sin t+2$.

FELHASZNÁLT ÉS AJÁNLOTT IRODALOM

1. *D. Leib:* Applications du calcul différentiel et intégral. A. Blanchard, Paris, 1930.)
2. *N. M. Gjunter—R. O. Kuzmin:* Felsőbb matematikai példatár. I. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.)
3. *A. F. Bermant:* Matematikai analízis. I. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.)
4. *M. K. Grebencsa—Sz. I. Novoszelov:* Matematikai analízis. I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.)
5. *R. Rothe:* Höhere Mathematik. I., IV. 1/2. (Teubner, Leipzig, 1948.)
6. *L. Kiepert—M. Stegemann:* Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung. I. (Hannover, 1901.)
7. *G. Grüss:* Differential- und Integralrechnung. (A. V. G. Leipzig, 1949.)
8. *Szász Pál:* A differenciál- és integrálszámítás elemei. I. (Közoktatásügyi Kiadó, Budapest, 1951, 2. kiadás.)
9. *Stachó Tibor:* Felsőbb mennyiségtan. (Budapest, 1944, 2. kiadás.)
10. *A. Ostrowski:* Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. I. (Birkhäuser, Basel, 1945.)
11. *L. A. Pipes:* Applied Mathematics for Engineers and Physicists. (McGraw-Hill, New York—London, 1946.)
12. Г. Н. Берман: Сборник задач по курсу математического анализа. (Гостехиздат, Москва, 1950. изд. втор., 1952. изд. трет.)
13. Б. И. Демидович: Сборник задач и упрожнений по математийескому анализу. (Гостехиздат, Москва, 1952.)
14. Г. М. Фихтенгольц: Курс дифференциальново и интегральново ицчисления. (Гостехиздат, Москва, 1949.)
15. *F. Dingeldey:* Sammlung von Aufgaben I. (Teubner, Leipzig, 1910.)
16. *M. Lindow:* Differentialrechnung. (Teubner, Leipzig, 1951, 5. kiadás.)
17. *Granville—Smith—Longley:* Elements of the Differential and Integral Calculus. (Gimn., 1941, Revis. ed.)
18. *R. S. Burrington—CH. CH. Torrance:* Higher Mathematics. (McGraw-Hill, New York, 1939.)
19. Ф. Франклин: Математический анализ I-II. (Изд. Иностр. Лит Москва, 1950.) (Fordítás angolból.)
20. *A. Hossner:* Einführung in die höhere Mathematik. (Springer, Wien, 1949.)
21. *E. Lindelöf—E. Ullrich:* Einführung in die höhere Analysis. (Teubner, Leipzig, 1950.)
22. *I. S. Sokolnikoff—E. S. Sokolnikoff:* Higher Mathematics for Engineers and Physicists. II. ed. (McGraw-Hill, New York—London, 1941.)